مراجع: ۱- کتاب ریاضیات مهندسی پیشرفته نوشته دایلی *
۲- کتاب ریاضیات مهندسی پیشرفته نوشته کرویت سیگ *
۳- کتاب ریاضیات مهندسی نوشته دلکراشد
۴- کتاب ریاضیات مهندسی نوشته شیدفرد
۵- رهیافت حل مسئله در ریاضی مهندسی نوشته دیانی

سرفصل ها:

① سری فوریه - انتگرال فوریه - تبدیل فوریه

۲- معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی PDE partial Differential Equ

- معادله انتشار موج
- معادله انتشار گرما
- معادله لاپلاس
- معادله پواسن

۳- توابع مختلط - توابع تحلیلی - مشتق گیری و انتگرال گیری توابع تحلیلی

۴- نگاشت همدیس (کانفرمال)

۵- سری تیلور - سری مک لورن - سری لوران

Sat	31	3	10	17	24
Sun		4	11	18	25
Mon		5	12	19	26
Tue		6	13	20	27
Wed		7	14	21	28
Thu	1	8	15	22	29
Fri	2	9	16	23	30

سری فوریه:

تابع متناوب:

تابعی را متناوب گوییم که در بازه آن از $-\infty$ تا $+\infty$ باشد و عدد مثبت p (دوره تناوب تابع) وجود داشته باشد که بتوان نوشت:

$$f(x+p) = f(x)$$

نکته: اگر p دوره تناوب تابع باشد آنگاه هر ضریب صحیح از آن نیز دوره تناوب خواهد بود.

مثال: تابع $\sin nx$ و $\cos nx$ متناوب هستند با دوره تناوب $p = \frac{2\pi}{n}$

توابع متعامد:

دو تابع متناوب $f(x)$ و $g(x)$ با دوره تناوب p بر هم عمودند اگر داشته باشیم

$$\int_0^p f(x)g(x)\,dx = 0$$

مثال: توابع $\sin nx$ و $\cos mx$ با دوره تناوب 2π بر هم عمودند.

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx\,dx = 0$$

مثال: برای توابع سینوسی داریم

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \text{نصف بازه} & m = n \end{cases}$$

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

مثال: برای توابع کسینوسی داریم

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

10:00

توابع زوج:

توابعی است که دامنه متقارن باشد و داشته باشیم $f(x) = f(-x)$

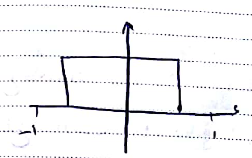
(محور yها محور تقارن تابع است)

12:00

توابع فرد:

توابعی هستند که دامنه‌ی متقارن دارند و داشته باشیم $f(x) = f(-x)$

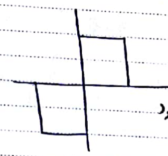
(مبدا مختصات نقطه تقارن باشد)



14:00

کسینوس تابع زوج است

سینوس تابع فرد است



15:00

دامنه xها و برهم مقادیر y میشود

16:00

مثال: تابع $\cos nx$ تابع زوج و تابع $\sin nx$ تابع فرد است.

نکته: اگر $f(x)$ زوج است $g(x)$ زوج است آنگاه $f(x)g(x)$ زوج است.

اگر $f(x)$ فرد است $g(x)$ فرد است آنگاه $f(x)g(x)$ زوج است

18:00

اگر $f(x)$ زوج $g(x)$ فرد است آنگاه $f(x)g(x)$ فرد است

19:00

نکته: برای توابع زوج داریم:

$$\int_{-L}^{L} f(x)g(x)\,dx = 2\int_0^{L} f(x)g(x)\,dx$$

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

نکته: برای توابع فرد داریم:

09:00

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$$

10:00

مثال

$$\int_{-3}^{3} x^3 \cos 0.1 x\,dx = 0$$

فرد = زوج فرد

چون تابع فرد است و متقارن است پس صفر میشود

11:00

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2\pi n x\,dx = 0$$

12:00

چون تابع فرد است و متقارن است پس صفر میشود

سری فوریه:

13:00

در مسائل مهندسی اغلب با توابع دوره‌ای نسبتاً پیچیده سر و کار داریم. و نیاز است که این توابع

14:00

پیچیده برحسب توابع ساده (سینوس و کسینوس) سر و کار داریم.

15:00

تعریف سری فوریه:

هر تابع دوره‌ای یا متناوب با دوره‌ی تناوب $2L$ که در شرایط دیریکله صدق کند (تابع تکه‌ای پیوسته باشد)

16:00

را میتوان بصورت یک سری مثلثاتی به شکل زیر نوشت که به آن سری فوریه می‌گویند

17:00

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x\right)$$

18:00

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x\,dx$$

19:00

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x\,dx$$

سری فوریه

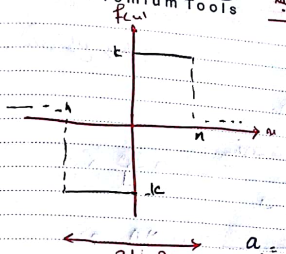
Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

Scanned by CamScanner

CARBO® Premium Tools

جلسه‌ی چهارم — پنجشنبه ۹۷/۱۲/۲

مثال: سری فوریه تابع مقابل را بیابید؟



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

تابع فرد است پس صفر میشود

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi}{\pi}x\,dx = 0$$

(فرد × زوج = فرد)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi}{\pi}x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} k\sin nx\,dx$$

بین صفر تا π، $f(x)$ برابر k میشود

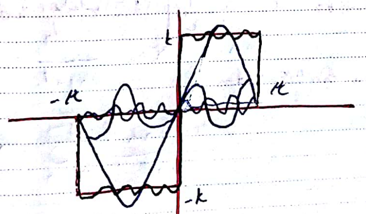
$$= \frac{2k}{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2k}{n\pi}(\cos 0 - \cos n\pi) = \frac{2k}{\pi}(1-(-1)^n)$$

هرجا $\cos n\pi$ دیدیم میشه $(-1)^n$

$$b_n = \frac{2k}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k}{n\pi}(1-(-1)^n)\sin nx}$$

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\sin x + \frac{4k}{3\pi}\sin 3x + \frac{4k}{5\pi}\sin 5x + \dots$$

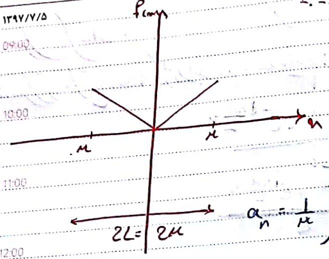


Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

CARBO® Premium Tools

جلسه دوم — پنجشنبه ۹۷/۱۲/۲

مثال: سری فوریه تابع $f(x) = |x|$ را بیابید $-\pi < x < \pi$



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$$

تابع اول و مشتقاتش	تابع دوم و انتگرال‌هایش
x	$\cos nx$
1 (+)	$\frac{\sin nx}{n}$
0 (−)	$-\frac{\cos nx}{n}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(x\sin\frac{nx}{n} + \cos\frac{nx}{n^2}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{\cos n\pi}{n^2} - 0 - \frac{\cos 0}{n^2}\right)$$

شکست حصر آبادان در عملیات ثامن الائمه علیه السلام (۱۳۶۰ هش)

$$\rightarrow a_n = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0$$

(زوج × فرد = فرد)

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1)\cos nx}$$

نکته: اگر تابع $f(x)$ فرد باشد $a_0 = 0$، $a_n = 0$

اگر تابع $f(x)$ زوج باشد $b_n = 0$ می‌باشد

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

Scanned by CamScanner

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

سری فوریه مختلط :

در سری فوریه تابع $f(x)$ اگر از روابط زیر استفاده کنیم :

$$\sin\frac{n\pi}{L}x = \frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2i}$$

$$\cos\frac{n\pi}{L}x = \frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2}$$

سری فوریه مختلط تابع حقیقی $f(x)$ حاصل می شود

سری فوریه مختلط

سیگنال متناوب با دوره تناوب $2L$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\, dx$$

مثال : سری فوریه مختلط تابع متناوب $f(x) = e^{-x}$ ، $-1<x<1$ را بیابید .

$2L=2$

$$c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-x} e^{-in\pi x}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-(1+in\pi)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{e^{-(1+in\pi)x}}{-(1+in\pi)}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1+in\pi)}\left[e^{(1+in\pi)} - e^{-(1+in\pi)}\right]$$

$$c_n = \frac{1}{1+in\pi}\sinh(1+in\pi)$$

$$\sinh\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sinh(1+in\pi)}{1+in\pi}\, e^{in\pi x}$$

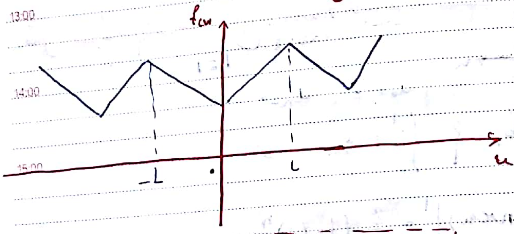
تفسیر همگرایی سری فوریه :

سری فوریه تابع $f(x)$ در نقاط پیوستگی به خود تابع میل می کند و در نقاط ناپیوستگی به میانگین حد چپ و راست تابع میل می کند .

بسط ~~[illegible]~~ نیم دامنه :

در بسیاری از کاربردهای مهندسی توابع دارای دامنه محدود مثلاً $0<x<L$ می باشد ، برای استفاده از سری فوریه در حل چنین مسائلی میتوان تابع را در تمام سه حالت گسترش زوج یا فرد داد .

الف) بسط نیم دامنه کسینوسی (گسترش زوج) :

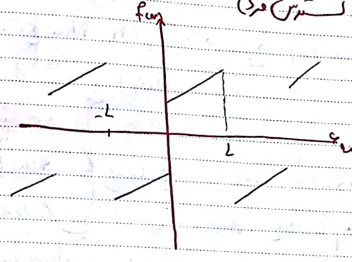


$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\, dx$$

$$b_n = 0$$

ب) بسط نیم دامنه سینوسی (گسترش فرد)

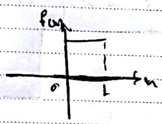


$a_0 = 0$

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

مثال: بسط نیم دامنه سینوسی تابع $f(x)=1$ را بیابید. $0<x<1$ ، $L=1$



$a_0 = 0 \quad a_n = 0$

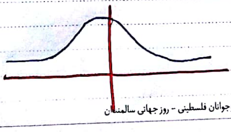
$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 1\sin n\pi x\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left(-\cos n\pi x\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\sin n\pi x}$$

انتگرال فوریه:

اگر تابع $f(x)$ غیر دوره‌ای باشد و از $-\infty$ تا $+\infty$ تعریف شده باشد و همچنین $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ کراندار باشد، آنگاه برای این تابع می‌توان انتگرال فوریه نوشت.



صفحه ۹

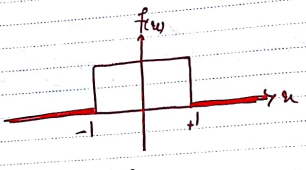
Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

$$f(x) = \int_0^{\infty}\left[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$

مثال: انتگرال فوریه تابع مقابل را بیابید.



$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1<x<1 \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases}$$

زوج

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} 1\cos\omega x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\omega x}{\omega}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi\omega}\left(\sin\omega - \sin(-\omega)\right) = \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx = 0$$

زوج × فرد = فرد

$$\boxed{f(x) = \int_0^{\infty}\frac{2\sin\omega}{\pi\omega}\cos\omega x\,d\omega}$$

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

صفحه ۹۵

جلسه دوم

مهر ۱۱ چهارشنبه
۲۲ محرم ۱۴۴۰
3 October
Wednesday . 2018
۱۳۹۷/۷/۱۱

CARBO® Premium Tools

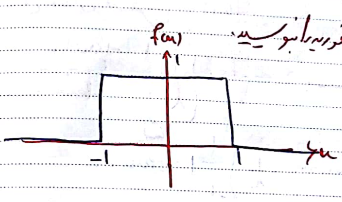
۹۷/۱۲/۲ پنجشنبه

انتگرال فوریه مختلط:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(w)e^{iwx}\,dw$$

$$F(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iwx}\,dx$$

مثال: برای تابع زیر فرم مختلط انتگرال فوریه را بنویسید.



$$F(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iwx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}1e^{-iwx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{-iwx}}{-iw}\right|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{2\pi i w}\left(e^{iw}-e^{iw}\right)$$

$$F(w)=\frac{\sin w}{\pi w}$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin w}{\pi w}e^{iwx}\,dw$$

Sat 7 14 21 28
Sun 1 8 15 22 29
Mon 2 9 16 23 30
Tue 3 10 17 24
Wed 4 11 18 25
Thu 5 12 19 26
Fri 6 13 20 27

صفحه ۱۱

ریاضیات مهندسی

جلسه سوم

CARBO® Premium Tools

مهر ۱۲ پنجشنبه
۲۴ محرم ۱۴۴۰
4 October
Thursday . 2018
۱۳۹۷/۷/۱۲

۹۷/۱۲/۹ پنجشنبه

تبدیل فوریه:

با اندکی تغییر در فرمول های انتگرال فوریه تبدیلی بنام تبدیل فوریه بصورت زیر حاصل می شود

الف) تبدیل فوریه کسینوسی (برای توابع زوج):

تبدیل فوریه کسینوسی $$F_c(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\cos wx\,dx$$

عکس تبدیل فوریه $$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}F_c(w)\cos wx\,dw$$

ب) تبدیل فوریه سینوسی (برای توابع فرد)

تبدیل فوریه سینوسی $$F_s(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\sin wx\,dx$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,F_s(w)\sin wx\,dx$$

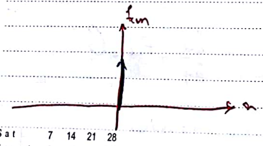
مهر ۱۳ جمعه
۲۵ محرم ۱۴۴۰
5 October
Friday . 2018
۱۳۹۷/۷/۱۳

ج) تبدیل فوریه مختلط

تبدیل فوریه مختلط $$F(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iwx}\,dx$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)e^{iwx}\,dw$$

مثال: تبدیل فوریه مختلط تابع ضربه واحد را بیابید.
تابع دلتای دیراک



$$\delta(x)=\begin{cases}\text{خیلی بزرگ}, & x=0\\ 0, & \text{بقیه جاها}\end{cases}$$

Sat 7 14 21 28
Sun 1 8 15 22 29
Mon 2 9 16 23 30
Tue 3 10 17 24
Wed 4 11 18 25
Thu 5 12 19 26
Fri 6 13 20 27

...خمینی (ره) از عراق به پاریس (۱۳۵۷ هـ ش) - روز نیروی انتظامی - شهادت حضرت امام زین العابدین علیه السلام (۹۵ هـ ق) به روایتی

صفحه ۱۲

engmath_wt

جلسه‌ی سوم

CARBO Premium Tools

۹۷/۷/۱۲ دوشنبه

خاصیت تابع ضربه: $\int_{-\infty} \delta(x) g(x) dx = g(0)$

$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \underbrace{e^{-i\omega x}}_{g(x)} dx = \frac{e^{-i\omega 0}}{\sqrt{2\pi}} \rightarrow F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

مثال: تبدیل فوریه‌ی تابع $f(x) = \underbrace{u(x)}_{\text{تابع پله واحد}} e^{-kx}$ را بیابید.

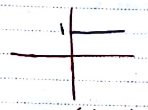
$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-kx} e^{-i\omega x} dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} 1 e^{-kx} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-(k+i\omega)x} dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(k+\omega)x} dx}{-(k+i\omega)} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(k+i\omega)} (e^{0} - e^{-\infty})$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k+i\omega}$

تابع پله واحد $u(x)$



$u(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (معادلات دیفرانسیل پاره‌ای)

partial Differential Equation (PDE)

صورت کلی معادله دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه ۲ برای تابع $u(x,y)$

$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$

در معادله فوق اگر $G = 0$ باشد آنگاه معادله همگن خواهد بود.

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

روز دامپزشکی

جلسه سوم

CARBO Premium Tools

۹۷/۷/۱۲ دوشنبه

- اگر تعریف کنیم $\Delta = B^2 - 4AC$ آنگاه داریم

الف) اگر $\Delta > 0$ معادله هذلولی‌گون خواهد بود.

ب) اگر $\Delta = 0$ معادله سهمیگون خواهد بود

ج) اگر $\Delta < 0$ معادله بیضی‌گون خواهد بود

انواع PDE

الف) معادله انتشار امواج یک بعدی (نخ مرتعش)

دینامیک $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (ثابت) $\Delta = 4c^2 > 0$ هذلولی‌گون

ب) معادله انتشار گرما تک بعدی

دینامیک $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\Delta = 0$ سهمیگون

ج) معادله لاپلاس دو بعدی

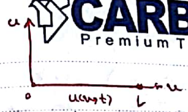
استاتیک $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $\Delta = -4c^2 < 0$ بیضی‌گون

د) معادله پواسن دو بعدی

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(x,y)$ $\Delta < 0$ بیضی‌گون

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

روز روستا و عشایر



معادله انتشار امواج تک بعدی (نخ مرتعش):

فرض میشود نخ همان مرتعش به طول L داریم که ابتدا و انتهای آن ثابت در نظر گرفته می شود. در لحظه صفر جابجایی اولیه به نخ میدهیم و سپس میخواهیم میزان لرزش نخ را در تمام زمان ها در تمام نقاط نخ بدست می آوریم.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{جابجایی اولیه} \\ u_t(x,0) = g(x) & \text{سرعت اولیه} \end{cases}$$

شرایط مرزی:

مقدار تابع یا مشتقات آن را در نقاط مرزی، شرایط مرزی می گویند.

شرایط اولیه:

مقدار تابع یا مشتقات آن را در لحظه صفر، شرایط اولیه میگویند.

روشها حل معادله موج تک بعدی (نخ مرتعش):

الف) روش تفکیک متغیرها

ب) روش دالامبر (تغییر متغیرها)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

حل معادله موج به روش تفکیک متغیرها

برای حل ابتدا فرض میکنیم پاسخ مسئله بصورت حاصلضرب دو تابع یکی برحسب x و دیگری برحسب t می باشد

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

رابطه فوق را در معادله موج جایگذاری میکنیم.

$u = FG$ ← یعنی مشتق نسبت به زمان

$u_t = F\dot{G}$, $u_{tt} = F\ddot{G}$

مشتق نسبت به مکان →

$u_x = F'G$, $u_{xx} = F''G$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$F\ddot{G} = c^2 F''G$$

دو طرف معادله را بر c^2FG تقسیم میکنیم.

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = K$$

K → مثبت: جواب صفری دهد ✗
K → صفر: جواب صفری دهد ✗
K → منفی ✓

ملاحظه میشود در رابطه فوق یک طرف آن تنها تابعی از مکان و طرف دیگر تنها تابعی از زمان است و تنها در حالتی تساوی برقرار است که هر دو کسر برابر عدد ثابت K باشند.

اگر K عدد صفر یا مثبت باشد پاسخ مسئله $u=0$ حاصل میشود که بدرد نمیخورد

K را عدد منفی در نظر میگیریم $k = -p^2$

به دو معادله زیر خواهیم رسید

$$\begin{cases} \dfrac{F''}{F} = -p^2 \\ \dfrac{\ddot{G}}{c^2G} = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'' + p^2F = 0 \\ \ddot{G} + c^2p^2G = 0 \end{cases}$$

ابتدا معادله مربوط به F را حل میکنیم

$$F'' + p^2F = 0$$

$u(0,t) = 0 \rightarrow F(0)G(t) = 0 \xrightarrow{G(t) \neq 0} F(0) = 0$

$u(L,t) = 0 \rightarrow F(L)G(t) = 0 \longrightarrow F(L) = 0$

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

Scanned by CamScanner

$F(x) = A\cos px + B\sin px$

$F(0) = 0 \rightarrow A\times 1 + B\times 0 = 0 \quad A = 0$

$F(L) = 0 \rightarrow B\sin pL = 0 \xrightarrow[B\neq 0]{} \sin pL = 0 \rightarrow pL = n\pi \rightarrow \boxed{p = \frac{n\pi}{L}}$ ($n = 1, 2, \dots$)

$F_n(x) = B\sin\frac{n\pi}{L}x = \sin\frac{n\pi}{L}x$ — B را یک فرض میکنیم

ملاحظه میشود بینهایت جواب برای $F(x)$ حاصل میشود

$\ddot{G} + c^2p^2G = 0 \quad \lambda^2 = c^2p^2 \rightarrow \lambda = cp \rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}}$ حل معادله زمانی

(λ_n:) مقادیر ویژه ی معادله ی موج

$\ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0$

$G_n(t) = A'_n\cos\lambda_n t + B'_n\sin\lambda_n t$

همانطور که ابتدا گفتیم $u = FG$ را داریم

$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t)$

$u_n(x,t) = (A'_n\cos\lambda_n t + B'_n\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x$

جواب عمومی معادله ی موج برابر ترکیب خطی جواب های فوق خواهد بود.

✓ $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A'_n\cos\lambda_n t + B'_n\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x$

برای بدست آوردن ضرایب A'_n و B'_n از شرایط اولیه استفاده میکنیم.

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \sin\frac{n\pi}{L}x$

ملاحظه میشود A'_n ها ضرایب سری فوریه ی سینوسی $f(x)$ هستند.

✓ $A'_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$

$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n\lambda_n \sin\frac{n\pi}{L}x$

ملاحظه میشود $\lambda_n B'_n$ ضرایب سری فوریه ی سینوسی تابع $g(x)$ هستند

✓ $B'_n = \frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$

جواب معادله ی موج یک بعدی (نخ مرتعش)

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\lambda_n t + B_n\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x$

$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad \lambda_n = \frac{nc\pi}{L}$

$B_n = \frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$

مثال: معادله ی موج را برای نخی به طول $L = \pi$ را حل کنید بطوریکه $c^2 = 1$ و جابجایی اولیه $f(x) = k\sin 2x$ و سرعت اولیه $g(x) = 0$ صفر حل کنید

$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} k\sin 2x \sin\frac{n\pi}{\pi}x\,dx$

$A_n = \frac{2k}{\pi}\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\sin nx\,dx = \begin{cases} k, & n = 2 \\ 0, & n \neq 2 \end{cases}$

($\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\sin nx\,dx$:) $\pi \quad n = 2$; $0 \quad n \neq 2$

روز بزرگداشت حافظ

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

Scanned by CamScanner

جلسه چهارم

پنجشنبه ۹۷/12/16

$A_2 = k$ و بقیه A_n ها صفرند

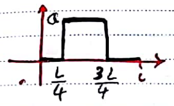
$B_n = 0$ چون $g(x)=0$

$\lambda_2 = \frac{2\pi c}{\pi} = 2$

$u(x,t) = A_2 \cos \lambda_2 t \sin \frac{2\pi}{\pi} x = k\cos 2t \sin 2x$

مثال: معادله موج یک بعدی (نخ مرتعش) را با جابجایی $f(x) = \sin\frac{\pi x}{L}$ و سرعت اولیه

$g(x) = \begin{cases} 0 & 0<x<\frac{L}{4} \\ a & \frac{L}{4}<x<\frac{3L}{4} \\ 0 & \frac{3L}{4}<x<L \end{cases}$ را حل کنید.



$A_n = \frac{2}{L}\frac{1}{2}\int_{0}^{L} \sin\frac{\pi}{L}x \sin\frac{n\pi}{L}x \, dx = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases}$

$L \quad n=1$

$0 \quad n\neq 1$

$A_1 = 1$ و بقیه A_nها صفرند

$B_n = \frac{2}{L\frac{nc\pi}{L}} \int_0^L g(x) \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$

$= \frac{2}{nc\pi}\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{4}} a \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2a}{nc\pi}\left(\frac{-L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x\right)\Big|_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{4}}$

$= \frac{2aL}{n^2\pi^2 c}\left(\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}\right)$

~~u(x,t) =~~

جلسه چهارم

پنجشنبه ۹۷/12/16

$u(x,t) = A_1 \cos \lambda_1 t \sin \frac{1\pi}{L} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2aL}{n^2\pi^2 c}\left(\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}\right) \times$ ($\lambda_1 = \frac{c\pi}{L}$)

$\sin\frac{nc\pi}{L}t \sin\frac{n\pi}{L}x$

$\lambda_1 = \frac{nc\pi}{L} = \frac{c\pi}{L}$

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$ حل معادله موج یک بعدی (نخ مرتعش) به روش دالامبر

اگر دو متغیر مستقل جدید بصورت مقابل تعریف کنیم

$\begin{cases} v = x + ct \\ z = x - ct \end{cases}$

و اگر معادله را با متغیرهای جدید بنویسیم داریم:

$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}$

$u_{xx} = \left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)_x = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}$

اگر متغیر مستقل باشند مشتقات مخلوط یکی میشود

$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = c\left(\frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)$

$u_{tt} = c\left(\frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)_t = c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial t}\right)$

($\frac{\partial v}{\partial t} = c$, $\frac{\partial z}{\partial t} = -c$, $\frac{\partial v}{\partial t} = c$, $\frac{\partial z}{\partial t} = -c$)

Scanned by CamScanner

CARBO® Premium Tools

جلسه‌ی چهارم

پنجشنبه 97/12/16

$$u_{tt}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$-4\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}=0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}=0$$

معادله‌ی موج به معادله‌ی فوق تبدیل می‌شود و برای حل این معادله دوبار از تابع u انتگرال می‌گیریم.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)-f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(x')\,dx'$$

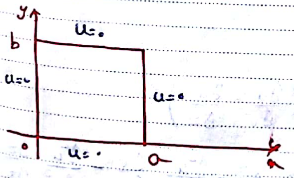
مثال: معادله‌ی موج یک بعدی را با $f(x)=0$ و $g(x)=\sin x$ به روش دالامبر حل کنید.

$$u(x,t)=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\sin x'\,dx'=\frac{1}{2c}(-\cos x)\Big|_{x-ct}^{x+ct}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2c}\left[\cos(x-ct)-\cos(x+ct)\right]$$

معادله‌ی موج دو بعدی (غشاء مرتعش):

$$u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy})$$



صفحه 21

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

۲۹ فروردین امتحان میان‌ترم

CARBO® Premium Tools

جلسه‌ی چهارم

پنجشنبه 97/12/16

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy}) \\ u(x,0,t)=0 \\ u(x,b,t)=0 \\ u(0,y,t)=0 \\ u(a,y,t)=0 \\ u(x,y,0)=f(x,y) \\ u_t(x,y,0)=g(x,y) \end{cases}$$

روش تفکیک متغیرها:

$$u(x,y,t)=F(x)\,H(y)\,G(t)$$

حل معادله‌ی موج دو بعدی (غشاء مرتعش مستطیلی).

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B'_{mn}\sin\lambda_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\,\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy$$

$$B'_{mn}=\frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a g(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\,\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy$$

$$\lambda_{mn}=c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a}+\frac{n^2}{b}}$$

صفحه 22

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

CARBO® Premium Tools

پنجشنبه 97/12/16

مثال: معادله‌ی موج دوبعدی (غشاء مرتعش) را برای مربعی با ابعاد $a=b=1$ و برای $c^2=1$ و سرعت اولیه‌ی صفر حل کنید $f(x,y)=k\sin \pi x \sin 2\pi y$

$B'_{mn}=0$

$$B_{mn}=\frac{4}{1\times 1}\int_0^1\int_0^1 k\sin \pi x \sin 2\pi y \sin m\pi x \sin n\pi y\,dx\,dy$$

$$=4k\,\underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin \pi x \sin m\pi x\,dx}\;\underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin 2\pi y \sin n\pi y\,dy}$$

$1 \quad m=1$, $0 \quad m\neq 1$; $1 \quad n=2$, $0 \quad n\neq 2$

در نتیجه $B_{12}=k$ بقیه‌ی B_{mn}ها صفرند.

$u(x,y,t)=B_{12}\cos \lambda_{12} t \sin \pi x \sin 2\pi y$ ($B_{12}\to k$)

$\lambda_{mn}=c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$

$\lambda_{12}=\pi\sqrt{5}$

$$u(x,y,t)=k\cos \pi\sqrt{5}\,t\,\sin \pi x \sin 2\pi y$$

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

CARBO® Premium Tools

پنجشنبه 98/2/22

معادله انتشار گرمای یک بعدی

0 ———— L

میله‌ای فلزی داریم که همگن میباشد و طول آن L است. در لحظه صفر میله دارای دمای اولیه $f(x)$ میباشد.

در نقاط ابتدا و انتهای میله دما صفر میباشد

معادله حاکم بر این سیستم به صورت مقابل است

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(0,t)=0 \\ u(L,0)=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

دما ← ، شرایط مرزی ← $u(0,t)=0$ و $u(L,0)=0$ ، شرایط اولیه ← $u(x,0)=f(x)$ → دمای اولیه میله

حل معادله انتشار گرمای یک بعدی با روش تفکیک متغیرها

$u(x,t)=F(x)G(t)$

$u=FG \rightarrow u_t=F\dot{G}$

$u_x=F'G \rightarrow u_{xx}=F''G$

روز تربیت بدنی و ورزش

در معادله جایگذاری میکنیم

$u_t=c^2u_{xx}$

$F\dot{G}=c^2F''G$

دو طرف معادله را بر c^2FG تقسیم میکنیم

$\frac{\dot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}=k$ → $+$ ✗ ، 0 ✗ (جواب صفر میشود) ، $-$ ✓

$k=-p^2$

$$\begin{cases} \frac{F''}{F}=-p^2 \\ \frac{\dot{G}}{c^2G}=-p^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F''+p^2F=0 \\ \dot{G}+c^2p^2G=0 \end{cases}$$

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

Scanned by CamScanner

ملاحظه میشود که به دو معادله دیفرانسیل معمولی یکی برحسب x و دیگری برحسب t رسیدیم که جداگانه حل میکنیم

حل معادله اول با در نظر گرفتن شرایط مرزی

$$F_n(x)=\sin\frac{n\pi}{L}x \quad , \quad n=1,2,\dots$$

در معادله دوم داریم $\lambda^2=c^2p^2$ پس $\lambda=cp$ یا $\lambda_n=\frac{cn\pi}{L}$ و جواب معادله دوم به صورت زیر حاصل میشود

$$\dot{G}+\lambda_n^2G=0$$

$$G_n(t)=B_n e^{-\lambda_n^2t}$$

از ضرب $F_n(x)$ و $G_n(t)$ داریم

$$u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=B_n\sin\frac{n\pi}{L}x\,e^{-\lambda_n^2t}$$

وجواب خاص معادله انتشار گرمای یک بعدی

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{L}x\,e^{-\lambda_n^2t}$$

با اعمال شرایط اولیه

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

صفحه 25

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

امتحان میان ترم ریاضیات مهندسی 98,2,12
تا سر اعداد مختلط

جلسه ۱۱ ام

پنجشنبه 98,2,22

مثال: مطلوبست حل معادله انتشار گرمای یک بعدی برای میله ای به طول π و با دمای اولیه 100 درجه. (داریم $c^2=1$)

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 100\sin\frac{n\pi}{\pi}x\,dx$$

$$B_n=\frac{200}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\,dx=\frac{200}{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^\pi$$

$$B_n=\frac{200}{n\pi}(\cos 0-\cos n\pi)=\frac{200}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{200}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx\,e^{-n^2t}$$

$$\lambda_n=\frac{nc\pi}{L}=n \quad (c\to 1,\ L\to\pi)$$

مثال: مطلوبست حل معادله انتشار گرمای یک بعدی برای میله ای به طول 10 و با دمای اولیه $f(x)=k\sin 0.1\pi x$ (داریم $c^2=1$)

$$B_n=\frac{2}{10}\int_0^{10}k\sin 0.1\pi x\,\sin\frac{n\pi}{10}x\,dx$$

$$B_n=\frac{2k}{10}\frac{1}{2}\int_{-10}^{10}\sin 0.1\pi x\,\sin 0.1n\pi x\,dx$$

$10 \leftarrow n=1$

$0 \leftarrow n\neq 1$

صفحه 26

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

روز صادرات

Scanned by CamScanner

پنجشنبه 98/1/22

CARBO Premium Tools

$B_1 = k$

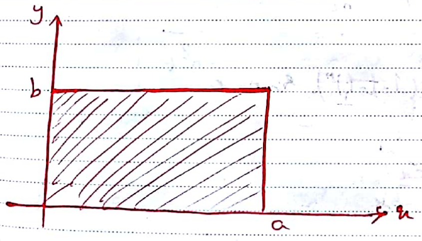
و تعیین B_n ها صفرند

$$u(x,t) = B_1 \sin \frac{1\pi}{10} x \, e^{-\lambda_1^2 t} \quad , \lambda_n = \frac{nc\pi}{L}$$

$$\boxed{u(x,t) = k \sin 0.1\pi x \, e^{-\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 t}} \quad , \lambda_1 = \frac{1 \times 1 \times \pi}{10}$$

معادله انتشار گرمای دو بعدی

$$u_t = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$$



معادله انتشار گرمای دوبعدی در حالت پایدار (استاتیک)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

به معادله فوق معادله لاپلاس دو بعدی میگویند

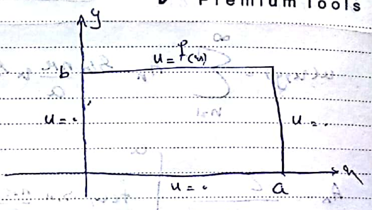
معادله لاپلاس دو بعدی به روش تفکیک متغیرها

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

پنجشنبه 98/1/22

CARBO Premium Tools

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(0,y) = 0 \\ u(a,y) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,b) = f(x) \end{cases}$$



حل معادله لاپلاس دو بعدی به روش تفکیک متغیرها

$$u(x,y) = F(x) H(y)$$

$$u = FH \longrightarrow u_x = \frac{dF}{dx} H \, , \, u_{xx} = \frac{d^2F}{dx^2} H$$

$$u_y = F \frac{dH}{dy} \, , \, u_{yy} = F \frac{d^2H}{dy^2}$$

در معادله لاپلاس جایگذاری میکنیم.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} H + F \frac{d^2H}{dy^2} = 0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } FH} \frac{1}{F} \frac{d^2F}{dx^2} + \frac{1}{H} \frac{d^2H}{dy^2} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{1}{F} \frac{d^2F}{dx^2} = -\frac{1}{H} \frac{d^2H}{dy^2} = k$$

$k \to +$ ✗

$k \to 0$ ✗

$k \to -$ ✓ $\quad k = -p^2$

با حل دو معادله حاصل شده و ضرب آن ها در یکدیگر جواب معادله لاپلاس دو بعدی بصورت زیر حاصل میشود.

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

Scanned by CamScanner

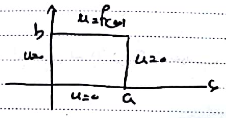
CARBO® Premium Tools

پنجشنبه ۹۸/۲/۲۲

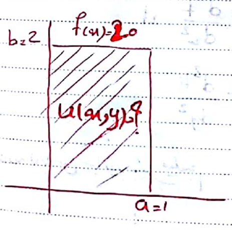
حل معادله لاپلاس در بعد

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}y$$

$$A_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$$



مثال: مطلوبست حل معادله لاپلاس برای مستطیل زیر:



$$A_n=\frac{2}{1\sinh\frac{n\pi 2}{a}}\int_0^1 20\sin\frac{n\pi}{1}x\,dx$$

$$A_n=\frac{40}{\sinh 2n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\,dx=\frac{40}{\sinh 2n\pi}\left(-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_0^1$$

$$A_n=\frac{40}{n\pi\sinh 2n\pi}(\cos 0-\cos n\pi)$$

$$A_n=\frac{40}{n\pi\sinh 2n\pi}(1-(-1)^2)$$

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

حلسه ششم

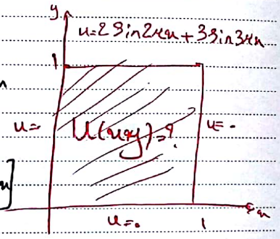
CARBO® Premium Tools

پنجشنبه ۹۸/۲/۲۲

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{40}{n\pi\sinh 2n\pi}(1-(-1)^n)\sin n\pi x\sinh n\pi y$$

مثال: مطلوبست حل معادله لاپلاس برای مربع زیر

$$f(x)=2\sin 2\pi x+3\sin 3\pi x$$



$$A_n=\frac{2}{\sinh n\pi}\int_0^1(2\sin 2\pi x+3\sin 3\pi x)\sin n\pi x\,dx$$

$$A_n=\frac{2}{\sinh n\pi}\left[2\int_0^1\sin 2\pi x\sin n\pi x\,dx+3\int_0^1\sin 3\pi x\sin n\pi x\,dx\right]$$

$\frac{1}{2}$: $n=2$ ، 0 : $n\neq 2$ — $\frac{1}{2}$: $n=3$ ، 0 : $n\neq 3$

$$A_2=\frac{2}{\sinh 2\pi}(1+0)=\frac{2}{\sinh 2\pi}$$

$$A_3=\frac{2}{\sinh 3\pi}\left(0+\frac{3}{2}\times 1\right)=\frac{3}{\sinh 3\pi}$$

بقیه A_n ها صفرند

$$u(x,y)=A_2\sin\frac{2\pi}{1}x\sinh\frac{2\pi}{1}y+A_3\sin\frac{3\pi}{1}x\sinh\frac{3\pi}{1}y$$

$$u(x,y)=\frac{2}{\sinh 2\pi}\sin 2\pi x\sinh 2\pi y+\frac{3}{\sinh 3\pi}\sin 3\pi x\sinh 3\pi y$$

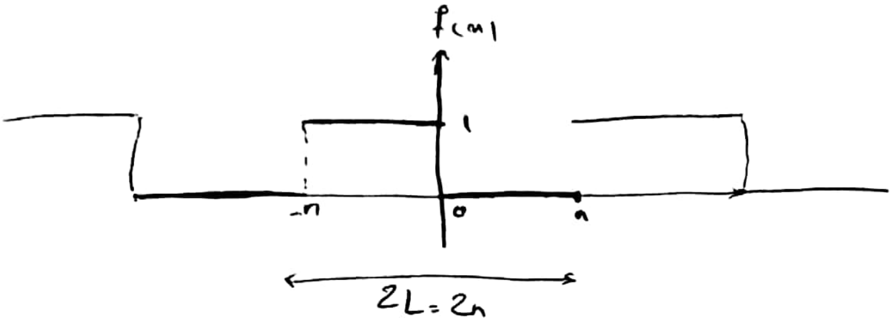
Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

اعتراض و افشاگری حضرت امام خمینی(ره) علیه پذیرش کاپیتولاسیون (۱۳۴۳ هش)

Scanned by CamScanner

حل چند نمونه مثال:

۱- سری فوریه تابع زیر را بیابید



$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}1\,dx+\int_{0}^{\pi}0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}dx=\frac{1}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}1\cos nx\,dx\longrightarrow a_n=\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}=0$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}1\sin nx\,dx\longrightarrow b_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{0}=-\frac{1}{\pi n}\left(\cos(-n\pi)-\cos 0\right)$$

$$\rightarrow b_n=\frac{1}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)$$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)\rightarrow \boxed{f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)\sin nx}$$

مثال: سری فوریه مختلط تابع دوره ای $2L=2\pi$، $f(x)=e^x$، $-\pi<x<\pi$ را بنویسید.

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-\frac{in\pi}{L}x}dx\rightarrow c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{x}e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(1-in)x}dx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\left(e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}\right)\longrightarrow c_n=\frac{1}{2\pi}\frac{1+in}{1+n^2}\left(e^{\pi}\underbrace{e^{in\pi}}_{(-1)^n}-e^{-\pi}\underbrace{e^{in\pi}}_{(-1)^n}\right)$$

$$c_n=\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{1+in}{1+n^2}\left(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}\right)=\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{1+in}{1+n^2}\sinh\pi$$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{in\pi}{L}x}\longrightarrow \boxed{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{1+in}{1+n^2}\sinh\pi\, e^{inx}}$$

مثال: معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم به صورت زیر داریم. به ازای چه xها و چه yها معادله بیضی گون است؟

$$\underbrace{e^{2x}}_{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\underbrace{2xe^{x+y}}_{B}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\underbrace{e^{2y}}_{C}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\Delta=B^2-4AC<0 \qquad 4x^2e^{2(x+y)}-4e^{2(x+y)}<0$$

$$\underbrace{4}_{\text{مثبت}}\underbrace{e^{2(x+y)}}_{\text{مثبت}}(x^2-1)<0\longrightarrow x^2-1<0$$

$\boxed{-1<x<1 \quad \text{به ازای xها}}$

Scanned by CamScanner

ریاضیات مهندسی 98/9/29

مثال: معادله‌ی دیفرانسیل جزئی زیر را به روش تفکیک متغیرها حل کنید

روش تفکیک متغیرها

$$u_x + u_y = 2(x+y)u$$

$$u(x,y) = F(x)H(y)$$

$$u = FH \to u_x = \frac{dF}{dx}H , \quad u_y = F\frac{dH}{dy}$$

در معادله جایگذاری می‌کنیم → $\frac{dF}{dx}H + F\frac{dH}{dy} = 2(x+y)FH$ دو طرف را بر FH تقسیم می‌کنیم → $\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} + \frac{1}{H}\frac{dH}{dy} = 2(x+y)$

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} - 2x = -\frac{1}{H}\frac{dH}{dy} + 2y = k$$

در حالتی تساوی برقرار است که ثابت باشد.

$$\begin{cases} \frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = 2x+k \to \frac{F'}{F} = 2x+k \xrightarrow{\text{از دو طرف انتگرال بگیریم}} \ln F = x^2+kx+a \\ \frac{1}{H}\frac{dH}{dy} = 2y-k \to \frac{H'}{H} = 2y-k \to \ln H = y^2-ky+b \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x) = e^{x^2+kx+a} \\ H(y) = e^{y^2-ky+b} \end{cases} \to u(x,y) = e^{x^2+y^2+k(x-y)+c}$$

آنالیز مختلط

مجموعه اعداد حقیقی

این مجموعه با IR نمایش می‌دهند دو عمل اصلی جمع و ضرب و همچنین رابطه ترتیبی (>) برای این مجموعه تعریف شده است.

تفسیر هندسی اعداد مختلط

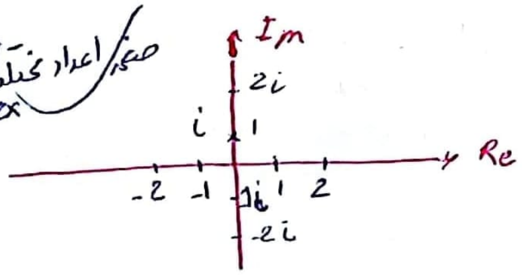
در مجموعه اعداد حقیقی برای معادله $x^2+1=0$ جوابی وجود ندارد

مجموعه اعداد مختلط:

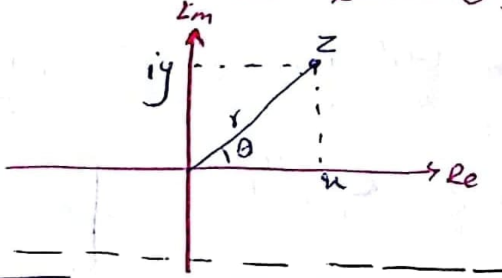
این مجموعه با C نمایش داده می‌شود که مجموعه IR زیرمجموعه‌ای از آن است.

$x^2+1=0 \to x^2=-1 \to x=\sqrt{-1}$ $\quad i=\sqrt{-1}$

صفحه اعداد مختلط Complex



نمایش نقطه در صفحه اعداد مختلط



قسمت موهومی z

قسمت حقیقی z

$z = x+iy$ نمایش دکارتی (قائم)

$z = re^{i\theta}$ نمایش قطبی — r همیشه مثبت است

$|z|$ = اندازه z

arg(z) زاویه z

تساوی دو عدد مختلط

$$\begin{cases} z_1 = a+ib \\ z_2 = c+id \end{cases} \quad z_1=z_2 \to \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

داریم

i

$i^2=-1$

$i^3=-i$

$i^4=1$

تبدیل نمایش قائم به قطبی

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x} \end{cases}$$

تبدیل نمایش قطبی به قائم

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

قدر مطلق اعداد مختلط

$$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}$$

مزدوج اعداد مختلط

تصویر نقطه نسبت به محورها با Re

$$z=x+iy \to \bar z = x-iy$$

$$z=re^{i\theta} \to \bar z = re^{-i\theta}$$

مزدوج

$$\begin{cases} z=re^{i\theta} \\ \bar z = re^{-i\theta} \end{cases} \to z\bar z = r^2 = x^2+y^2$$

Scanned by CamScanner

ریاضیات مهندسی 98/1/29

رابطه اویلر

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$$

$$\sinh\theta = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

در اعداد مختلط عملگرهای جمع و منها و ضرب و تقسیم تعریف میشود ولی رابطه ترتیبی (< >) نداریم

جمع و تفاضل دو عدد مختلط

نمایش قائم

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{cases} \rightarrow z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

نمایش قطبی

$$\begin{cases} z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \end{cases} \rightarrow z_1 \pm z_2 = (r_1\cos\theta_1 \pm r_2\cos\theta_2) + i(r_1\sin\theta_1 \pm r_2\sin\theta_2)$$

ضرب و تقسیم اعداد مختلط

نمایش قطبی

$$\begin{cases} z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta)} \end{cases}$$

نمایش قائم

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z_1 z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} \times \frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\dots} \, dx}{-(k+i\omega)} \Bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(k+i\omega)} (e^{0} - e^{-1})$$

15:00

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k+i\omega}$$

16:00

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (معادلات دیفرانسیل پاره‌ای)

17:00

partial Differential Equation (pDE)

صورت کلی معادله دیفرانسیل پاره‌ای با مرتبه ۲ برای تابع $u(x,y)$

18:00

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

19:00

در معادله فوق اگر $G=0$ باشد آنگاه معادله همگن خواهد بود.

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

09:00

اگر تعریف کنیم $\Delta = B^2 - 4AC$ آنگاه داریم

10:00

الف) اگر $\Delta > 0$ معادله هذلولی گون خواهد بود.

ب) اگر $\Delta = 0$ معادله سهموی گون خواهد بود.

11:00

ج) اگر $\Delta < 0$ معادله بیضی گون خواهد بود.

12:00

انواع PDE

13:00

الف) معادله انتشار امواج یک بعدی (تیغ مرتعش)

دینامیک $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\qquad \Delta = 4c^2 > 0$ هذلولی بود

14:00

ثابت

15:00

ب) معادله انتشار دما یک بعدی

دینامیک $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\qquad \Delta = 0$ سهموی

17:00

ج) معادله لاپلاس دو بعدی

استاتیک $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $\qquad \Delta = -4c^2 < 0$ بیضی گون

18:00

د) معادله پواسن دو بعدی

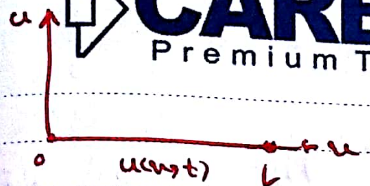
19:00

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(x,y)$ $\qquad \Delta < 0$ بیضی گون

Scanned by CamScanner

جلسه‌ی سوم

پنجشنبه 96/12/9



معادله انتشار امواج تک بعدی (نخ مرتعش):

فرض میشود نخ همان مرتعش به طول L داریم که ابتدا و انتهای آن ثابت در نظر گرفته می شود در لحظه صفر جابجایی اولیه به نخ میدهیم و سپس میخواهیم میزان لرزش نخ را در تمام زمان ها در تمام نقاط نخ بدست می آوریم.

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx} \\ u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \\ u(x,0)=f(x) & \text{جابجایی اولیه} \\ u_t(x,0)=g(x) & \text{سرعت اولیه} \end{cases}$$

شرایط مرزی:

مقدار تابع یا مشتقات آن را در نقاط مرزی، شرایط مرزی می گویند.

شرایط اولیه:

مقدار تابع یا مشتقات آن را در لحظه صفر، شرایط اولیه میگویند.

روشهای حل معادله موج تک بعدی (نخ مرتعش):

الف) روش تفکیک متغیرها

ب) روش دالامبر (تغییر متغیرها)

$$u_{tt}=c^2u_{xx}$$

حل معادله موج به روش تفکیک متغیرها

برای حل ابتدا فرض میکنیم پاسخ مسئله بصورت حاصلضرب دو تابع یکی برحسب x و دیگری برحسب t می باشد

$$u(x,t)=F(x)G(t)$$

جلسه سوم

پنجشنبه ۹۷/۷/۱۹

روابط فوق را در معادله موج جایگذاری میکنیم.

$u = FG$

یعنی مشتق نسبت به زمان

$u_t = F\dot{G}$ و $u_{tt} = F\ddot{G}$

مشتق نسبت به مکان

$u_x = F'G$ و $u_{xx} = F''G$

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$

$F\ddot{G} = c^2 F''G$

دو طرف معادله را بر c^2FG تقسیم میکنیم.

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = K$$

مثبت — جواب صفر می‌دهد ✗
صفر — جواب صفر می‌دهد ✗
منفی ✓

ملاحظه میشود در رابطه فوق یک طرف آن تنها تابعی از مکان و طرف دیگر تنها تابعی از زمان است و تنها در حالتی تساوی برقرار است که هر دو کسر برابر عدد ثابت K باشند.

اگر K عدد صفر یا مثبت باشد پاسخ مسئله $u=0$ حاصل میشود که به درد نمیخورد

K را عدد منفی در نظر میگیریم

$k = -p^2$

به دو معادله زیر خواهیم رسید

$$\begin{cases} \dfrac{F''}{F} = -p^2 \\ \dfrac{\ddot{G}}{c^2G} = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'' + p^2F = 0 \\ \ddot{G} + c^2p^2G = 0 \end{cases}$$

ابتدا معادله مربوط به F را حل میکنیم

$F'' + p^2F = 0$

$u(0,t) = 0 \rightarrow F(0)G(t) = 0 \xrightarrow{G(t) \neq 0} F(0) = 0$

$u(L,t) = 0 \rightarrow F(L)G(t) = 0 \longrightarrow F(L) = 0$

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

CARBO® Premium Tools

$$F(x) = A\cos px + B\sin px$$

$$F(0)=0 \rightarrow A\times 1 + B\times 0 = 0 \qquad A=0$$

$$F(L)=0 \rightarrow B\sin pL = 0 \xrightarrow[B\neq 0]{} \sin pL = 0 \rightarrow pL = n\pi \rightarrow p = \frac{n\pi}{L}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

$$F_n(x) = B\sin\frac{n\pi}{L}x = \sin\frac{n\pi}{L}x$$

(B را یک فرض میکنیم)

ملاحظه میشود بینهایت جواب برای $F(x)$ حاصل میشود

$$\ddot{G} + c^2p^2G = 0 \qquad \lambda^2 = c^2p^2 \rightarrow \lambda = cp \rightarrow \lambda_n = c\frac{n\pi}{L}$$

حل معادله (زمان)

λ_n: مقادیر ویژه ی معادله ی موج

$$\ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0$$

$$G_n(t) = A'_n\cos\lambda_n t + B'_n\sin\lambda_n t$$

همانطور که در ابتدا گفتیم $u = FG$ داریم

$$u_n(x,t) = F_n(x)\,G_n(t)$$

$$u_n(x,t) = \left(A'_n\cos\lambda_n t + B'_n\sin\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

جواب عمومی معادله ی موج برابر ترکیب خطی جواب های فوق خواهد بود.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A'_n\cos\lambda_n t + B'_n\sin\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

برای بدست آوردن ضرایب A'_n و B'_n از شرایط اولیه استفاده میکنیم.

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

Scanned by CamScanner

جلسه چهارم

مهر
۱ صفر ۱۴۴۰
11 October
Thursday . 2018
۱۹
پنجشنبه

پنجشنبه ۹۷/۱۲/۱۶

CARBO Premium Tools

۱۳۹۷/۷/۱۹

09:00 $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \sin \frac{n\pi}{L} x$

ملاحظه میشود A'_n ها ضرایب سری فوریه سینوسی $f(x)$ هستند.

10:00

$\checkmark \; A'_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$

11:00

$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \lambda_n \sin \frac{n\pi}{L} x$

12:00 ملاحظه میشود $B'_n \lambda_n$ ضرایب سری فوریه سینوسی تابع $g(x)$ هستند.

13:00 $\checkmark \; B'_n = \frac{2}{L\lambda_n} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$

14:00

جواب معادله موج یک بعدی (نخ مرتعش)

15:00

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x$

مهر
۲ صفر ۱۴۴۰
12 October
Friday . 2018
۲۰
جمعه

$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \qquad \lambda_n = \frac{nc\pi}{L}$

۱۳۹۷/۷/۲۰

$B_n = \frac{2}{L\lambda_n} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$

مثال، معادله موج را برای کانفی به طول $L = \pi$ را حل کنید بطوریکه $c^2 = 1$ وجابجایی اولیه $f(x) = k \sin 2x$ و سرعت اولیه $g(x) =$ صفر حل کنید

$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} k \sin 2x \sin \frac{n\pi}{\pi} x \, dx$

$A_n = \frac{2k}{\pi} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \sin nx \, dx = \begin{cases} k, & n = 2 \\ 0, & n \neq 2 \end{cases}$

$\pi \quad n = 2$
$0 \quad n \neq 2$

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

روز بزرگداشت حافظ

صفحه ۱۸

Scanned by CamScanner

CARBO® Premium Tools

پنجشنبه ۹۷/12/16   جلسه چهارم

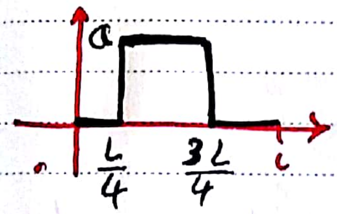
$A_2 = k$ و بقیه A_n ها صفرند

$B_n = 0$ چون $g(x) = 0$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi c}{\pi} = 2$$

$$u(x,t) = A_2 \cos \lambda_2 t \sin \frac{2\pi}{\pi} x = k \cos 2t \sin 2x$$

مثال: معادله موج یک بعدی (نخ مرتعش) را برای جابجایی $f(x) = \sin\frac{\pi}{L}x$ و سرعت اولیه $g(x)$ را حل کنید.



$$g(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{4} \\ a & \frac{L}{4} < x < \frac{3L}{4} \\ 0 & \frac{3L}{4} < x < L \end{cases}$$

$$A_n = \frac{2}{L}\cdot\frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \sin\frac{\pi}{L}x \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

(انتگرال: L برای $n=1$، 0 برای $n \neq 1$)

$A_1 = 1$ و بقیه A_n ها صفرند

$$B_n = \frac{2}{L\frac{n\pi c}{L}} \int_0^L g(x) \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi c}\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{4}} a \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2a}{n\pi c}\left(\frac{-L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x\right)\Bigg|_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{4}}$$

$$= \frac{2aL}{n^2\pi^2 c}\left(\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}\right)$$

~~u(x,t) =~~

صفحه ۱۹

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

Scanned by CamScanner

مهر
۴ صفر ۱۴۴۰
14 October
Sunday . 2018
۲۲
یکشنبه
۱۳۹۷/۷/۲۲

جلسه چهارم

پنجشنبه 97/12/16

CARBO®
Premium Tools

$$u(x,t) = A_1 \cos \lambda_1 t \sin \frac{\pi}{L} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2aL}{n^2\pi^2 c}\left(\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}\right) \times \sin\frac{nc\pi}{L} t \sin\frac{n\pi}{L} x$$

$$\lambda_1 = \frac{c\pi}{L}$$

$$\lambda_1 = \frac{nc\pi}{L} = \frac{c\pi}{L}$$

حل معادله موج یک بعدی (نخ مرتعش) به روش دالامبر

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

اگر دو متغیر مستقل جدید بصورت مقابل تعریف کنیم

$$\begin{cases} v = x + ct \\ z = x - ct \end{cases}$$

دو طرف معادله را با متغیرهای جدید بنویسیم داریم:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$u_{xx} = \left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)_x = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}$$

اگر متغیر مستقل باشد مشکلی ندارد یکی میشود

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial v}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{c} + \frac{\partial u}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{-c} = c\left(\frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$u_{tt} = c\left(\frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)_t = c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{c} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{-c} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{c} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{-c}\right)$$

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

روز جهانی استاندارد

Scanned by CamScanner

$$u_{tt} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$-4\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial z} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial z} = 0$$

معادله موج به معادله فوق تبدیل میشود و برای حل این معادله دوبار از تابع u انتگرال میگیریم.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) - f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(x')\,dx'$$

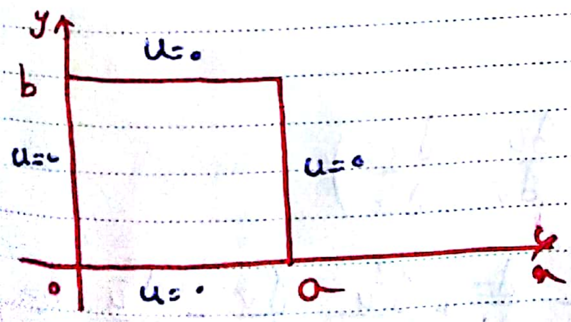
مثال: معادله موج یک بعدی را با $f(x)=0$ و $g(x)=\sin x$ به روش دالامبر حل کنید.

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \sin x'\,dx' = \frac{1}{2c}(-\cos x)\Big|_{x-ct}^{x+ct}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\left[\cos(x-ct) - \cos(x+ct)\right]$$

معادله موج دو بعدی (غشا مرتعش):

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$$



09:00 10:00 11:00 12:00 13:00 14:00 15:00 16:00 17:00 18:00 19:00

صفحه 21

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	

Scanned by CamScanner

۲۶ فروردین امتحان میان‌ترم

پنجشنبه 97/12/16

جلسه چهارم

CARBO®
Premium Tools

$$
\begin{cases}
u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}) \\
u(x,0,t) = 0 \\
u(x,b,t) = 0 \\
u(0,y,t) = 0 \\
u(a,y,t) = 0 \\
u(x,y,0) = f(x,y) \\
u_t(x,y,0) = g(x,y)
\end{cases}
$$

روش تفکیک متغیرها:

$$u(x,y,t) = F(x)\, H(y)\, G(t)$$

حل معادله موج دوبعدی (غشاء مرتعش مستطیلی)

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B'_{mn} \sin \lambda_{mn} t\right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x,y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \, dx\, dy$$

$$B'_{mn} = \frac{4}{ab \lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x,y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \, dx\, dy$$

$$\lambda_{mn} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a} + \frac{n^2}{b}}$$

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

روز ملی پارالمپیک

Scanned by CamScanner

مهر ۲۵ چهارشنبه
۷ صفر ۱۴۴۰
17 October Wednesday . 2018
۱۳۹۷/۷/۲۵

جلسه ی چهارم

پنجشنبه 97/12/16

مثال: معادله ی موج دو بعدی (غشاء مرتعش) را برای مربعی با ابعاد a=b=1 و برای $c^2=1$

$f(x,y)=k\sin\pi x\sin2\pi y$ و سرعت اولیه صفر حل کنید

$B'_{mn}=$

$$B_{mn}=\frac{4}{1\times1}\int_0^1\int_0^1 k\sin\pi x\sin2\pi y\sin m\pi x\sin n\pi y\,dx\,dy$$

$$=4k\,\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin\pi x\sin m\pi x\,dx\;\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin2\pi y\sin n\pi y\,dy$$

$1 \quad m=1$; $1 \quad n=2$

$0 \quad m\neq1$; $0 \quad n\neq2$

$B_{12}=k$ و بقیه B_{mn} ها صفرند.

$$u(x,y,t)=B_{12}\cos\lambda_{12}t\sin1\pi x\sin2\pi y \qquad \lambda_{mn}=c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a}+\frac{n^2}{b}}$$

$B_{12}\to k$

$$\lambda_{12}=\pi\sqrt5$$

$$u(x,y,t)=k\cos\pi\sqrt5\,t\sin\pi x\sin2\pi y$$

Sat		7	14	21	28	
Sun	1	8	15	22	29	
Mon	2	9	16	23	30	
Tue	3	10	17	24		
Wed	4	11	18	25		
Thu	5	12	19	26		

صفحه 23

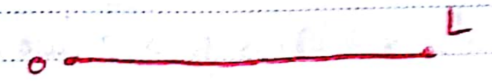
Scanned by CamScanner

جلسه ی پنجم

۹۴،۲،۲۲ پنجشنبه

CARBO® Premium Tools

معادله انتشار گرما یک بعدی



میله ای داریم که عایق میباشد و طول آن L است. در لحظه صفر میله دارای دمای اولیه $f(x)$ میباشد.

در نقاط ابتدا و انتهای میله دما صفر میباشد

معادله حاکم برای سیستم بصورت مقابل است

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,0) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

دما ← شرایط مرزی

شرایط اولیه ← $u(x,0) = f(x)$ → دمای اولیه میله

حل معادله انتشار گرما یک بعدی با روش تفکیک متغیرها

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

$$u = FG \to u_t = F\dot{G}$$

$$u_x = F'G \to u_{xx} = F''G$$

در معادله جایگذاری میکنیم

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

$$F\dot{G} = c^2 F'' G$$

دو طرف معادله را بر c^2FG تقسیم میکنیم

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k \begin{cases} + \times \\ 0 \times \\ - \checkmark \end{cases}$$

جواب صفر میشود

$$k = -p^2$$

$$\begin{cases} \frac{F''}{F} = -p^2 \\ \frac{\dot{G}}{c^2 G} = -p^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F'' + p^2 F = 0 \\ \dot{G} + c^2 p^2 G = 0 \end{cases}$$

صفحه ۲۸

Scanned by CamScanner

ملاحظه میشود که به دو معادله دیفرانسیل معمولی یکی بر حسب t و دیگری بر حسب x رسیدیم که جداگانه حل میکنیم

حل معادله اول با در نظر گرفتن شرایط مرزی

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x \quad , \quad n = 1, \dots, \infty$$

در معادله دوم داریم $\lambda^2 = c^2 p^2$ پس $\lambda = cp$ یا $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$ و جواب معادله

$$\dot{G} + \lambda_n^2 G = 0$$

هم بصورت زیر حاصل میشود

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t}$$

از ضرب $F_n(x)$ و $G_n(t)$ داریم

$$u_n(x,t) = F_n(x) G_n(t) = B_n \sin \frac{n\pi}{L} x e^{-\lambda_n^2 t}$$

وجواب خاص معادله انتشار گرما یک بعدی

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x \, e^{-\lambda_n^2 t}$$

با اعمال شرایط اولیه

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

امتحان میان ترم ریاضیات مهندسی ۹۸/۲/۱۲
تا سر اعداد مختلط

خانم کاظم

۲۹ یکشنبه
مهر ۱۳۹۷/۷/۲۹
21 October Sunday . 2018

پنجشنبه ۹۸/۲/۲۲

CARBO Premium Tools

مثال: مطلوبست حل معادله انتشار گرمای یک بعدی برای میله ای با طول π و دمای اولیه ۱۰۰ درجه. (دما صفر) ($c^2=1$)

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}100\sin\frac{n\pi}{\pi}x\,dx$$

$$B_n=\frac{200}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{200}{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$B_n=\frac{200}{n\pi}(\cos 0-\cos n\pi)=\frac{200}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{200}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx\, e^{-n^2t}$$

$$\lambda_n=\frac{nc\pi}{L\to\pi}=n$$

مثال: مطلوبست حل معادله انتشار گرمای یک بعدی برای میله ای بطول ۱۰ و با دمای اولیه $f(x)=k\sin 0.1\pi x$. (دما صفر) ($c^2=1$)

$$B_n=\frac{2}{10}\int_0^{10}k\sin 0.1\pi x\sin\frac{n\pi}{10}x\,dx$$

$$B_n=\frac{2k}{10}\cdot\frac{1}{2}\int_{-10}^{10}\sin 0.1\pi x\sin 0.1n\pi x\,dx$$

$10 \leftarrow n=1$

$0 \leftarrow n\neq 1$

Sat		7	14	21	28
Sun	1	8	15	22	29
Mon	2	9	16	23	30
Tue	3	10	17	24	
Wed	4	11	18	25	
Thu	5	12	19	26	
Fri	6	13	20	27	

روز صادرات

صحیح 26

Scanned by CamScanner

CARBO®
Premium Tools

جلسه پنجم

پنجشنبه 98/7/22

$B_1 = k$

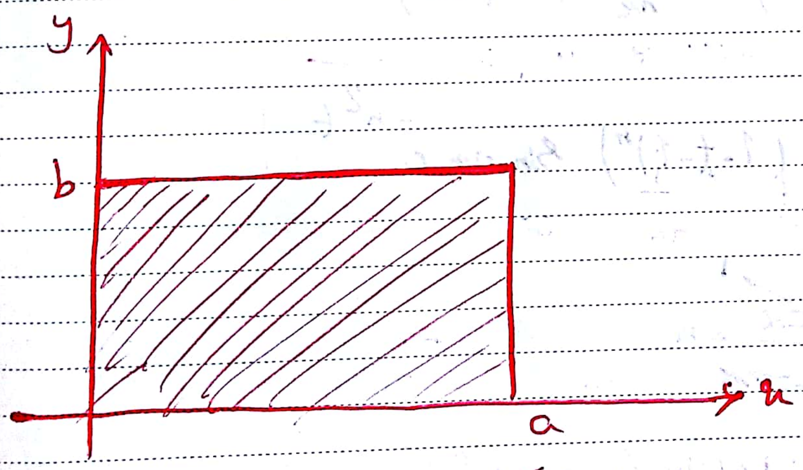
و بقیه B_n ها صفرند

$$u(x,t) = B_1 \sin \frac{1\pi}{10} x \, e^{-\lambda_1^2 t} \quad , \lambda_n = \frac{nc\pi}{L}$$

$$\boxed{u(x,t) = k \sin 0.1\pi x \, e^{-\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 t}} \quad , \lambda_1 = \frac{1 \times 1 \times \pi}{10}$$

معادله انتشار گرمای دو بعدی

$$u_t = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$$



معادله انتشار گرمای دو بعدی در حالت پایدار (استاتیک)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

به معادله فوق معادله لاپلاس دو بعدی میگویند

معادله لاپلاس دو بعدی به روش تفکیک متغیرها

صفحه 27

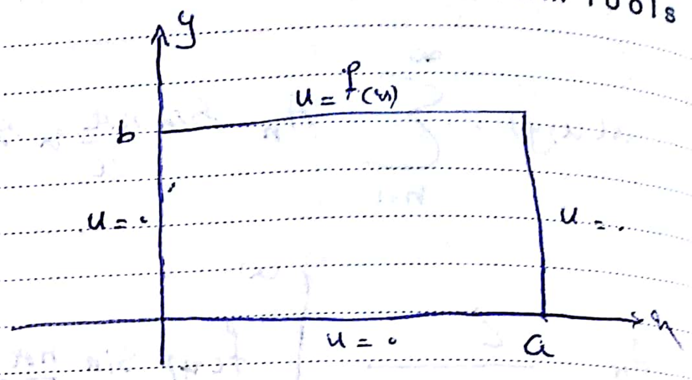
جلسه ی ۹ کاتبی

پنجشنبه 98,1,22

CARBO Premium Tools

09:00

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0\\ u(0,y)=0\\ u(a,y)=0\\ u(x,0)=0\\ u(x,b)=f(x)\end{cases}$$



10:00

11:00

12:00

حل معادله لاپلاس دو بعدی به روش تفکیک متغیرها

13:00

$u(x,y)=F(x)\,H(y)$

14:00

$u=FH \longrightarrow u_x=\frac{dF}{dx}H\;,\; u_{xx}=\frac{d^2F}{dx^2}H$

15:00

$\qquad\searrow u_y=F\frac{dH}{dy}\;,\; u_{yy}=F\frac{d^2H}{dy^2}$

16:00

در معادله لاپلاس جایگذاری میکنیم. $u_{xx}+u_{yy}=0$

17:00

$\frac{d^2F}{dx^2}H+F\frac{d^2H}{dy^2}=0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } FH} \frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dy^2}=0$

18:00

$\longrightarrow \frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2}=-\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dy^2}=k$ → + ×

19:00

→ 0 ×

→ − ✓ $\qquad k=-p^2$

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

با حل دو معادله حاصل شده و ضرب آنها در یکدیگر جواب معادله لاپلاس دو بعدی بصورت زیر حاصل میشود.

Scanned by CamScanner

CARBO®
Premium Tools

جلسه‌ی پنجم

پنجشنبه ۹۸/۲/۲۲

حل معادله لاپلاس دو بعدی

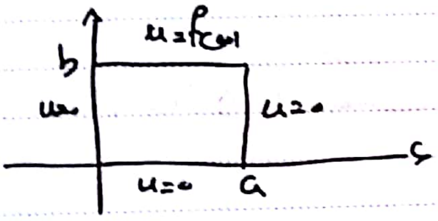
09:00

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}y$$

10:00

$$A_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

11:00

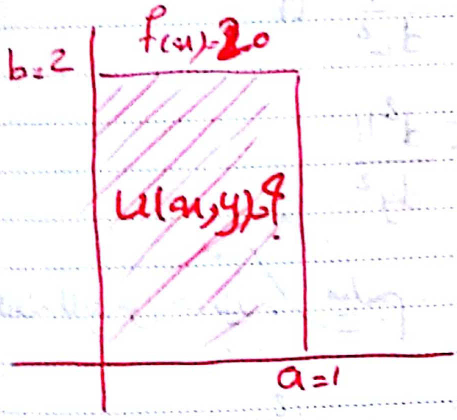


12:00

13:00

14:00

مثال: مطلوب است حل معادله لاپلاس برای مستطیل زیر:



15:00

$$A_n=\frac{2}{1\sinh\frac{n\pi 2}{a}}\int_0^1 20\sin\frac{n\pi}{1}x\,dx$$

16:00

$$A_n=\frac{40}{\sinh 2n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\,dx=\frac{40}{\sinh 2n\pi}\left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_0^1$$

17:00

$$A_n=\frac{40}{n\pi\sinh 2n\pi}(\cos 0-\cos n\pi)$$

18:00

$$A_n=\frac{40}{n\pi\sinh 2n\pi}(1-(-1)^2)$$

19:00

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

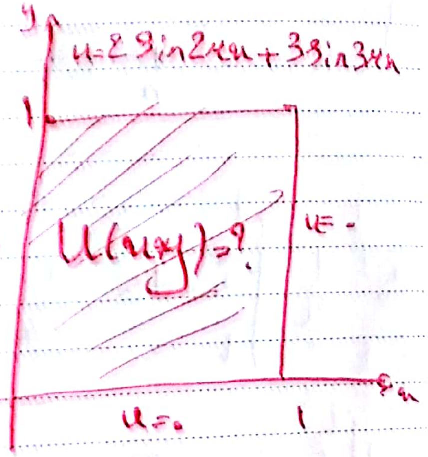
صفحه ۲۹

Scanned by CamScanner

CARBO®
Premium Tools

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi \sinh n\pi}\left(1-(-1)^n\right) \sin n\pi x \, \sinh n\pi y$$

مثال: مطلوبست حل معادله لاپلاس در ناحیه شکل زیر



$$f(x) = 2\sin 2\pi x + 3\sin 3\pi x$$

$$A_n = \frac{2}{\sinh n\pi}\int_0^1 (2\sin 2\pi x + 3\sin 3\pi x)\sin n\pi x \, dx$$

$$A_n = \frac{2}{\sinh n\pi}\Big[2\underbrace{\int_0^1 \sin 2\pi x \sin n\pi x \, dx}_{\frac{1}{2}\ n=2,\ \ 0\ n\neq 2} + 3\underbrace{\int_0^1 \sin 3\pi x \sin n\pi x \, dx}_{\frac{1}{2}\ n=3,\ \ 0\ n\neq 3}\Big]$$

$$A_2 = \frac{2}{\sinh 2\pi}(1+0) = \frac{2}{\sinh 2\pi}$$

$$A_3 = \frac{2}{\sinh 3\pi}\left(0 + \frac{3}{2}\times 1\right) = \frac{3}{\sinh 3\pi}$$

بقیه A_n ها صفرند

$$u(x,y) = A_2 \sin \frac{2\pi}{1} x \, \sinh \frac{2\pi}{1} y + A_3 \sin \frac{3\pi}{1} x \, \sinh \frac{3\pi}{1} y$$

$$u(x,y) = \frac{2}{\sinh 2\pi} \sin 2\pi x \, \sinh 2\pi y + \frac{3}{\sinh 3\pi} \sin 3\pi x \, \sinh 3\pi y$$

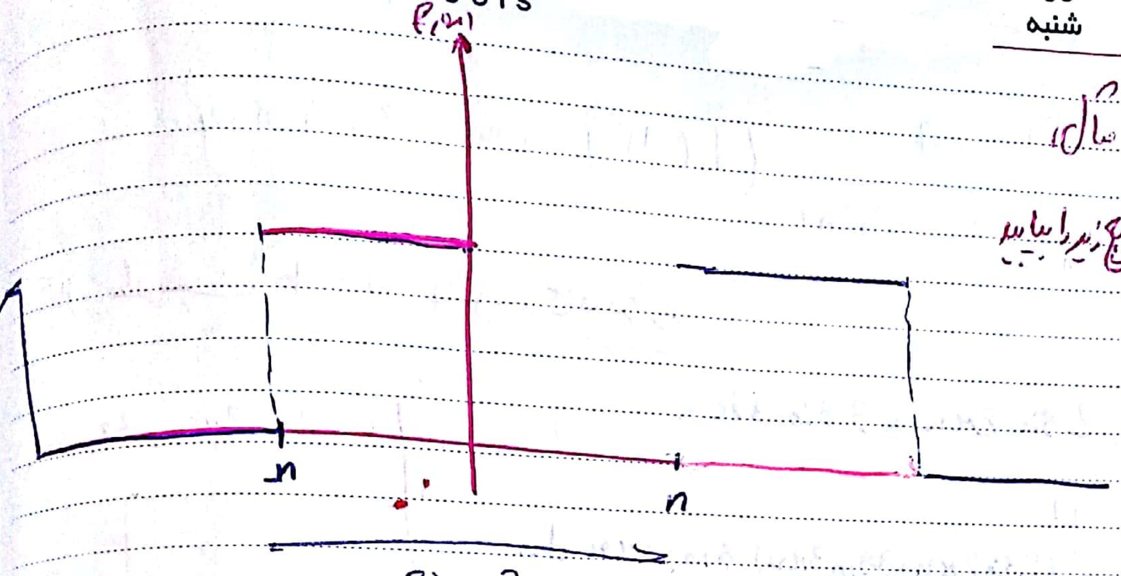
CARBO® Premium Tools

دوشنبه ۹۸/۱/۲۹

آبان
۵
شنبه
۱۷ صفر ۱۴۴۰
27 October
Saturday . 2018
۱۳۹۷/۸/۵

حل چند نمونه مثال ۱)

سری فوریه تابع زیر را بیابید



$2L = 2\pi$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 1\,dx + \int_{0}^{\pi} 0\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\cos nx\,dx \rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\sin nx\,dx \rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\left.\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\right|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi n}(\cos(-n\pi) - \cos 0)$$

$$\rightarrow b_n = \frac{1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x + b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)\sin nx$$

مثال: سری فوریه مختلط تابع دوره‌ای $f(x) = e^x$ را بنویسید $-\pi < x < \pi$

$2L = 2\pi$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,e^{-\frac{in\pi x}{L}}\,dx \rightarrow c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}e^{-inx}\,dx =$$

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

صفحه 31

Scanned by CamScanner

پنجشنبه 98,1,22

CARBO Premium Tools

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\left(e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}\right) \to c_n=\frac{1}{2\pi}\frac{1+in}{1+n^2}\left(e^{\pi}\underbrace{e^{-in\pi}}_{(-1)^n}-e^{-\pi}\underbrace{e^{in\pi}}_{(-1)^n}\right)$$

$$c_n=\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{1+in}{1+n^2}\left(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}\right)=\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{1+in}{1+n^2}\sinh\pi$$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{L}x}$$

$$\to f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{1+in}{1+n^2}\sinh\pi\, e^{inx}$$

مثال: معادله دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم به صورت زیر داریم. به ازای چه مقادیری x معادله بیضوی‌گونه است؟

$$\underbrace{e^{2x}}_{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\underbrace{2xe^{x+y}}_{B}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\underbrace{e^{2y}}_{C}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\Delta=B^2-4AC \qquad 4x^2e^{2(x+y)}-4e^{2(x+y)}<0$$

$$4e^{2(x+y)}(x^2-1)<0 \to x^2-1<0 \qquad -1<x<1$$ به ازای همه y ها

مثال: معادله دیفرانسیل پاره‌ای زیر را به روش تفکیک متغیرها حل کنید

$$u_x+u_y=2(x+y)u$$

روش تفکیک متغیرها

$$u(x,y)=F(x)H(y) \qquad u=FH \begin{cases} u_x=\frac{dF}{dx}H \\ u_y=F\frac{dH}{dy}\end{cases}$$

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
	1	8	15	22	29
	2	9	16	23	30
	3	10	17	24	
	4	11	18	25	

CARBO® Premium Tools

پنجشنبه ۹۸/۱/۲۹

در معادله جایگذاری میکنیم ← $\frac{dF}{dx}H + F\frac{dH}{dy} = 2(x+y)FH$

دو طرف را بر FH تقسیم میکنیم $\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} + \frac{1}{H}\frac{dH}{dy} = 2(x+y)$

$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} - 2x = -\frac{1}{H}\frac{dH}{dy} + 2y = k$ درحالتی تساوی برقرار است که k ثابت باشد

$$\begin{cases} \frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = 2x + k \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} \frac{F'}{F} = 2x + k \xrightarrow{\text{از دو طرف انتگرال بگیریم}} \ln F = x^2 + kx + a \\ \frac{1}{H}\frac{dH}{dy} = 2y - k \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } y} \frac{H'}{H} = 2y - k \longrightarrow \ln H = y^2 - ky + b \end{cases}$$

$F(x) = e^{x^2 + kx + a}$

$H(y) = e^{y^2 - ky + b}$ $\longrightarrow$ $u(x,y) = e^{x^2 + y^2 + k(x-y) + c}$

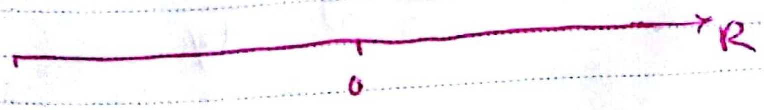
اعداد مختلط:

مجموعه اعداد حقیقی:

این مجموعه با IR نشان میدهند و عمل اصلی جمع و ضرب و همچنین رابطه ترتیبی (>) برای این مجموعه تعریف شده است

تعبیر هندسی اعداد مختلط:

در مجموعه اعداد حقیقی برای معادله $x^2+1=0$ پاسخی وجود ندارد

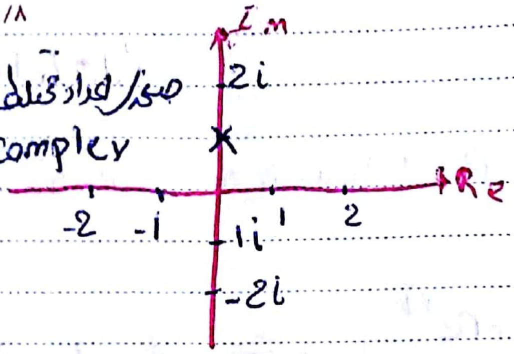


Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

ریاضی عمومی ۲

CARBO® Premium Tools

۱۳۹۷/۸/۸



مجموعه اعداد مختلط:

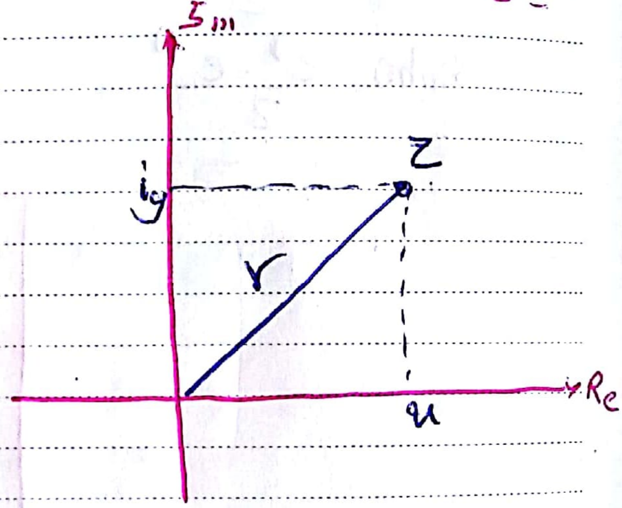
این مجموعه با $\mathbb{C}$ نمایش داده می‌شود که مجموعه $\mathbb{R}$ زیرمجموعه آن است.

$x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1 \rightarrow x=\sqrt{-1}$ $\quad$ $\boxed{i=\sqrt{-1}}$

نمایش نقطه در صفحه اعداد مختلط

قسمت حقیقی z (طول z) — قسمت موهومی z (عرض z)

$z = x + iy$ نمایش دکارتی (قائم)



همیشه مثبت است

$z = re^{i\theta}$ نمایش قطبی

$\arg(z)$ زاویه z

$|z|$ = اندازه z

تساوی دو عدد مختلط

$$\begin{cases} z_1 = a+ib \\ z_2 = c+id \end{cases} \quad z_1 = z_2 \rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

داریم:

i

$i^2=-1$

$i^3=-i$

$i^4=1$

تبدیل نمایش قائم به قطبی:

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

تبدیل نمایش قطبی به قائم:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

قدر مطلق اعداد مختلط

$$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30

Scanned by CamScanner

مزدوج اعداد مختلط

$z = x + iy \longrightarrow \bar{z} = x - iy$

تصویر نقطه نسبت به محورها یا Re

$z = re^{i\theta} \rightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}$

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

$$\sinh\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

$$z = re^{i\theta}, \quad \bar{z} = re^{-i\theta} \longrightarrow z\bar{z} = r^2 = x^2 + y^2$$

رابطه اویلر

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

در اعداد مختلط عملگرهای جمع و منها و ضرب و تقسیم تعریف می شود ولی رابطه ترتیبی ($<$) نداریم

جمع و تفاضل در اعداد مختلط

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

Scanned by CamScanner

آبان
۲۲ صفر ۱۴۴۰
1 November
Thursday . 2018

۱۰
پنجشنبه

پنجشنبه ۹۸/۱/۲۹

CARBO®
Premium Tools

۱۳۹۷/۸/۱۰

09:00

نمایش قائم

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$\rightarrow z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

11:00

12:00

۱-۲ نمایش قطبی

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$

$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$\rightarrow z_1 + z_2 = (r_1\cos\theta_1 \pm r_2\cos\theta_2) + i(r_1\sin\theta_1 \pm r_2\sin\theta_2)$$

14:00

15:00

شهادت آیت ا... قاضی طباطبایی اولین شهید محراب به دست منافقان (۱۳۵۸ هـ.ش)

آبان
۲۳ صفر ۱۴۴۰
2 November
Friday . 2018

۱۱
جمعه

۱۳۹۷/۸/۱۱

ضرب و تقسیم اعداد مختلط

۱-۲ نمایش قطبی

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$

$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$\rightarrow \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

Scanned by CamScanner

CARBO®
Premium Tools

09:00

جابش تائم

$Z_1 = x_1 + iy_1$

10:00

$Z_2 = x_2 + iy_2$ →

11:00

12:00

13:00

$Z_1 Z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

14:00

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

15:00

16:00

17:00

18:00

19:00

Scanned by CamScanner

امتحان میان‌ترم هفته‌ی بعد تا سر آنالیز مختلط

جلسه ۵

۱۳ آبان — ۲۵ صفر ۱۴۴۰ — 4 November — Sunday . 2018 — یکشنبه — ۱۳۹۷/۸/۱۳

پنجشنبه ۹۸/۲/۵

توان n ام یک عدد مختلط:

$z = re^{i\theta}$

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

رابطه دموآر

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

مثال: محاسبه کنید

$i^2 = -1$

الف) $(1-i)^2 + (2+i)^2 = 1-1-2i+4-1+4i = 3+2i$

ب) $\frac{1+i}{(3-i)(1-2i)} = \frac{1+i}{3-6i-i-2} = \frac{1+i}{1-7i} \times \frac{1+7i}{1+7i} = \frac{1+7i+i-7}{1+49}$

$= \frac{-6+8i}{50} = \frac{-3}{25} + i\frac{4}{25}$

ج) $(\cos 30 + i\sin 30)^8 \underset{\text{دموآر}}{=} \cos(30\times8) + i\sin(30\times8)$

$= \cos 240 + i\sin 240 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓ بله

د) $\sin(2+3i) = \frac{e^{i(2+3i)} - e^{-i(2+3i)}}{2i} = \frac{e^{i2-3} - e^{-i2+3}}{2i}$

$= \frac{e^{i2}e^{-3} - e^{-i2}e^{3}}{2} = \frac{e^{-3}(\cos 2 + i\sin 2) - e^{3}(\cos 2 - i\sin 2)}{2i}$

$= \frac{\cos 2(e^{-3} - e^{3}) + i\sin 2(e^{-3} + e^{3})}{2i}$

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

تسخیر لانهٔ جاسوسی آمریکا به دست دانشجویان پیرو خط امام (۱۳۵۸ هـ‌ش) - روز ملی مبارزه با استکبار جهانی - روز دانش‌آموز

Scanned by CamScanner

$\cosh\theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$

$\sinh\theta = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$

CARBO® Premium Tools

پنجشنبه ۹۸/۲/۵

$$= \frac{-\cos 2(e^{3}-e^{-3}) + i\sin 2(e^{3}+e^{-3})}{2i} = i\cos 2\sinh 3 + \sin 2\cosh 3$$

یا از مخرج بصورت برود i ـ میشود.

$$= \sin 2\cosh 3 + i\cos 2\sinh 3$$

10:00

مثال: معادله زیر را حل کنید

11:00

$$z\bar{z} - z + \bar{z} = 0$$

12:00

$$x^2+y^2 - x - iy + x - iy = 0$$

13:00

$$x^2+y^2 - i2y = 0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=0 \rightarrow x=0 \rightarrow \boxed{z=0} \\ -2y=0 \rightarrow y=0 \end{cases}$$

14:00

15:00

ریشه n ام یک عدد مختلط

$$z = re^{i\theta}$$

16:00

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

17:00

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

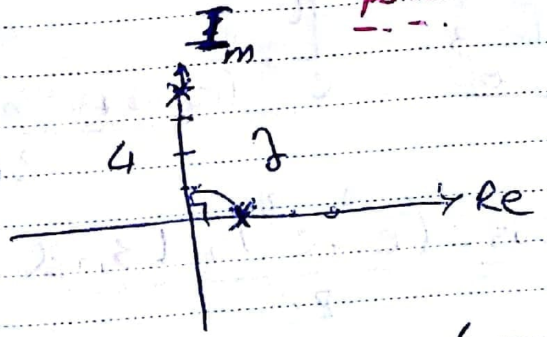
18:00

هر عدد n تا ریشه n ام دارد

مثال: ریشه های دوم 4i را بیابید

19:00

$$z = 4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$$



Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

روز فرهنگ عمومی

Scanned by CamScanner

CARBO®
Premium Tools

جلسه

98/2/5 چهارشنبه

09:00

$$\sqrt{z} = \sqrt[2]{4}\, e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)} = \begin{cases} 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + i\sqrt{2} & k=0 \\ 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} & k=1 \end{cases}$$

نقطه‌مبت

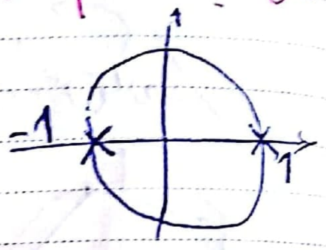
10:00

مثال: ریشه‌های دوم، سوم، چهارم و ... عدد ۱ را بدست آورید.

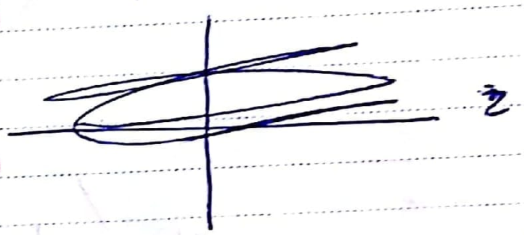
11:00

$$z = 1 = 1e^{i0}$$

$$\sqrt[2]{z} = \sqrt[2]{1}\, e^{i\left(\frac{0+2k\pi}{2}\right)} = \begin{cases} 1e^{i0} = 1 & ,k=0 \\ 1e^{i\pi} = -1 & ,k=1 \end{cases}$$



12:00



13:00

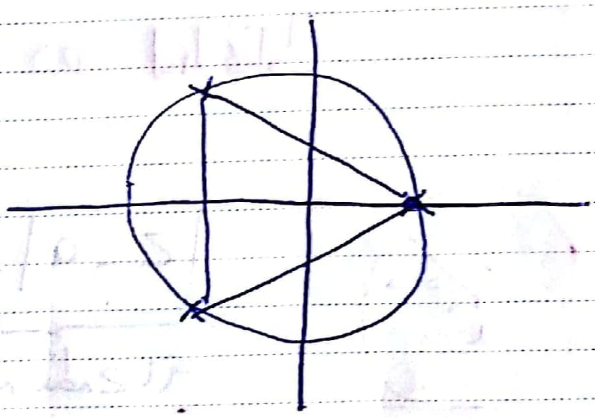
14:00

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt{1}\, e^{i\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)} = \begin{cases} e^{i0} = 1 & k=0 \\ e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & k=1 \\ e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{3} & k=2 \end{cases}$$

15:00

16:00

17:00



ریشه‌های سوم عدد 1 بر رئوس مثلث منتظم محاط در دایره واحد است.

18:00

19:00

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	

روز وقف

40/

جلسه

آبان

۱۶ چهارشنبه

۲۸ صفر ۱۴۴۰

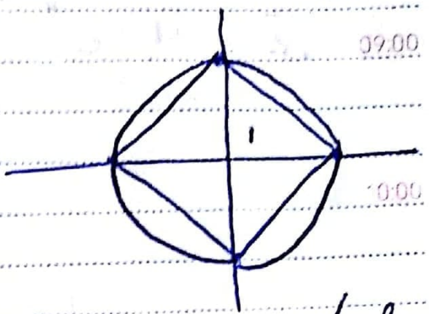
7 November

Wednesday . 2018

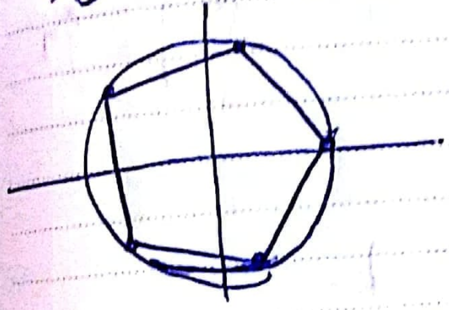
۱۳۹۷/۸/۱۶

پنجشنبه ۹۸/۲/۵

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1}\; e^{i\left(\frac{0+2k\pi}{4}\right)} = \begin{cases} 1 & k=0 \\ e^{i\frac{\pi}{2}} = i & k=1 \\ e^{i\pi} = -1 & k=2 \\ e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i & k=3 \end{cases}$$



ریشه‌های چهارم عدد ۱ رئوس مربع محاط در دایره واحد می‌باشد که یکی از رئوس آن روی محور x مثبت باشد.

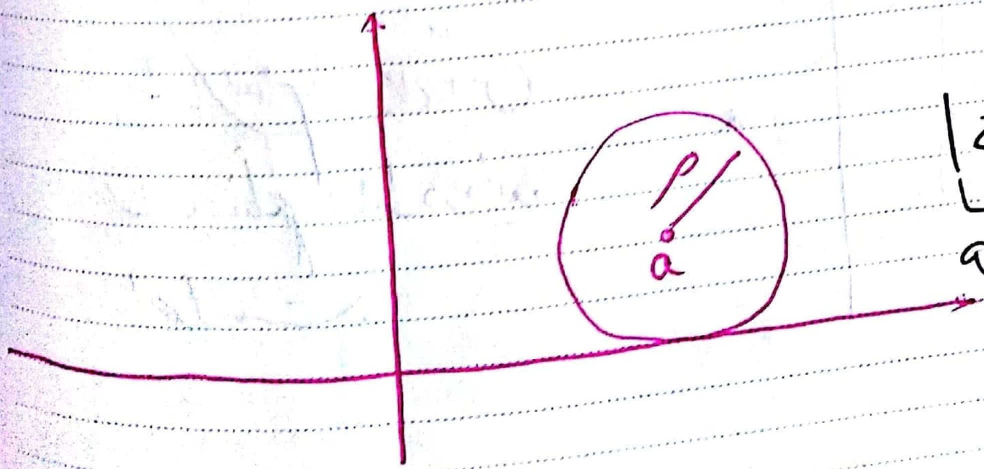


نکته: ریشه‌های n ام یک عدد حقیقی $z = re^{i0}$

رئوس n ضلعی منتظم محاط شده در دایره‌ای به شعاع $\sqrt[n]{r}$ است که یکی از رئوس روی محور حقیقی مثبت قرار دارد.

منحنی‌ها و نواحی در صفحه اعداد مختلط:

الف) دایره در صفحه اعداد مختلط



$|z - a| = r$

فاصله نقطه z تا a

Sat	5	12	19	26
Sun	6	13	20	27
Mon	7	14	21	28
	8	15	22	29

Scanned by CamScanner

آبان
۲۹ صفر ۱۴۴۰
8 November
Thursday . 2018
۱۷
پنجشنبه

۱۵ پنجشنبه 98/2/5

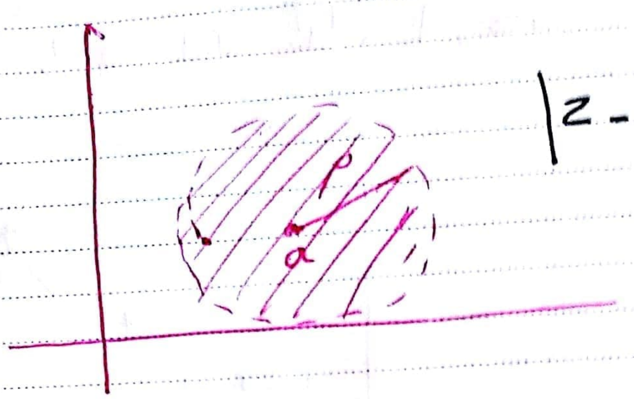
ب) قرص دایره‌ای باز

۱۳۹۷/۸/۱۷

09:00

10:00

11:00



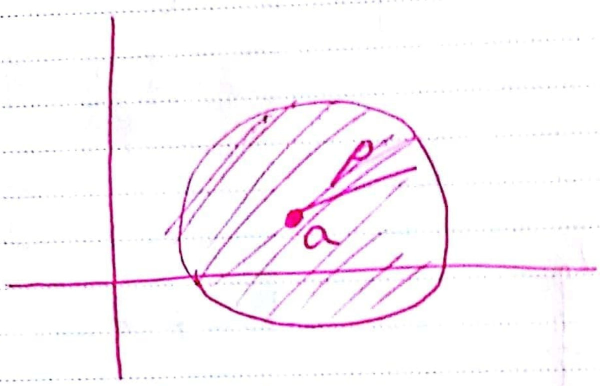
$|z-a|<\rho$

ج) قرص دایره‌ای بسته

12:00

13:00

14:00



$|z-a|\leq\rho$

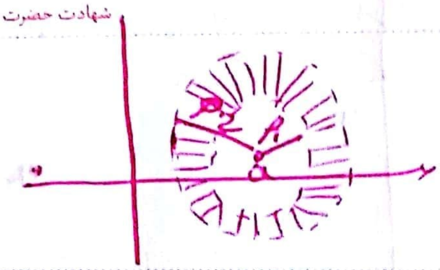
15:00

شهادت حضرت امام رضا علیه السلام (۲۰۳ هـ ق) (تعطیل)

د) طوق باز

آبان
۱ ربیع الاول ۱۴۴۰
9 November
Friday . 2018
۱۸
جمعه

۱۳۹۷/۸/۱۸



$\rho_1<|z-a|<\rho_2$

ه) طوق بسته

$\rho_1\leq|z-a|\leq\rho_2$

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

هجرت حضرت رسول اکرم صلی ا... علیه وآله از مکه به مدینه

Scanned by CamScanner

CARBO®
Premium Tools

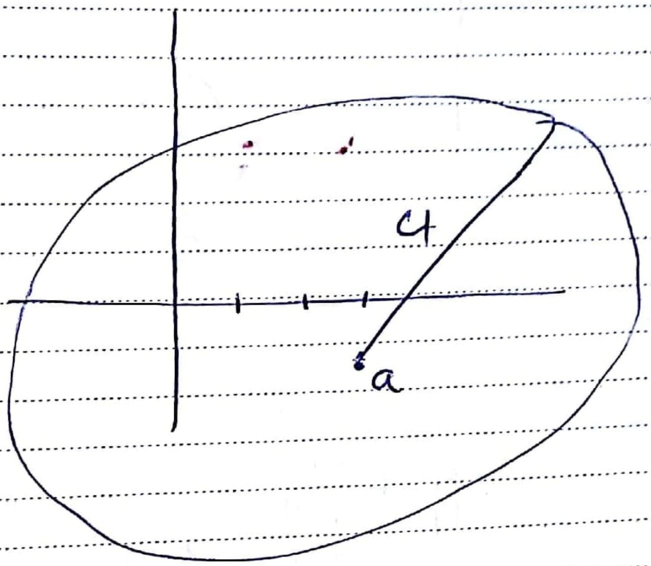
پنجشنبه 98/2/15

۹۷/۸/۱۹ چند سؤال امتحانی

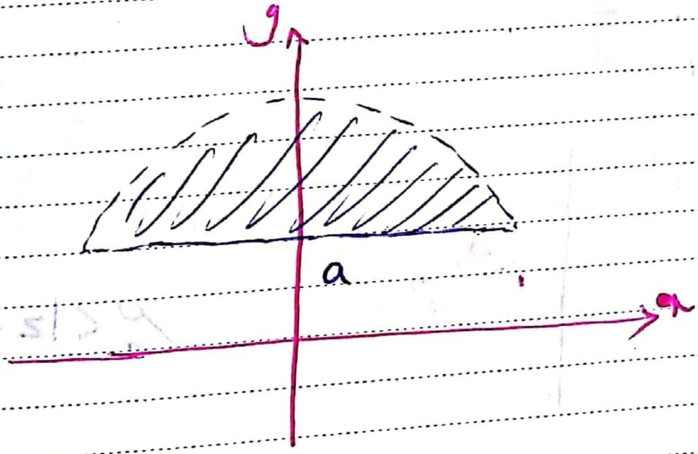
مثال: نواحی زیر را در صفحه اعداد مختلط نشان دهید

الف) $|z-3+i|=4$

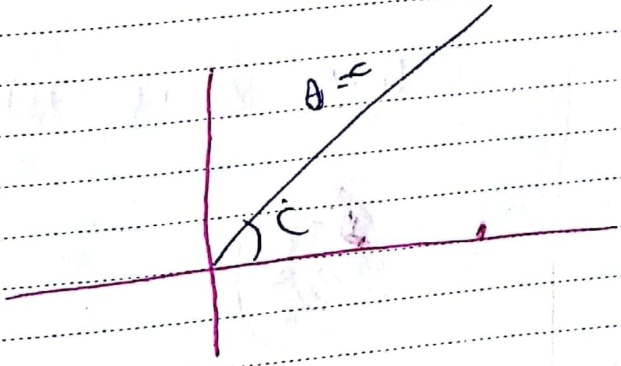
دایره‌ای به مرکز $3-i$ و شعاع 4



ب) $y\geq a$



ج) $\theta=c$



10:00
11:00
12:00
13:00
14:00
15:00
16:00
17:00
18:00
19:00

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

صفحه 43

Scanned by CamScanner

CARBO® Premium Tools

جلسه ۵

آبان ۱۹ شنبه
۲ ربیع الاول ۱۴۴۰
10 November
Saturday . 2018

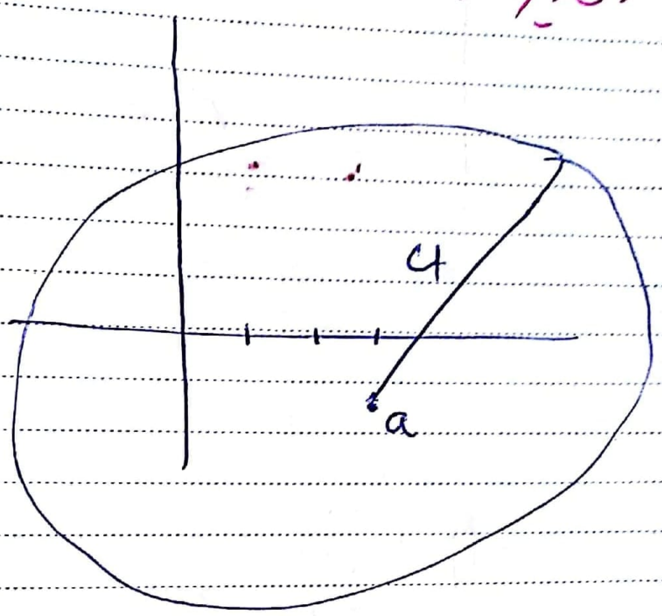
پنجشنبه 98,2,5

۹۷/۸/۱۹ چند سؤال امتحانی

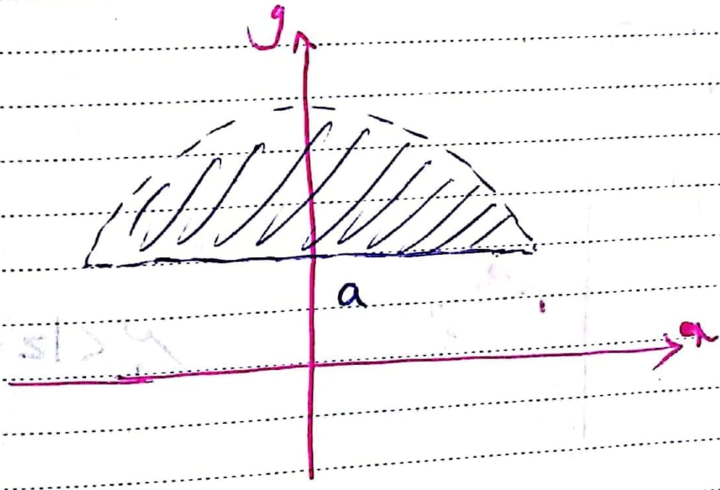
مثال: نواحی زیر را در صفحه اعداد مختلط نشان دهید

الف) $|z-3+i|=4$

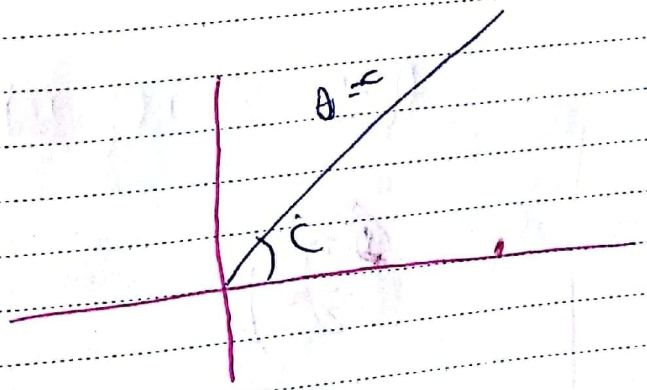
دایره‌ای به مرکز $3-i$ و شعاع 4



ب) $y>a$



ج) $\theta=c$



Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

صفحه 43

CARBO® Premium Tools

جلسه ی

پنجشنبه 98/2/5

09:00 د) $Re\left(\frac{1}{z}\right) > 1$

$Re\left(\frac{1}{x+iy}\right) > 1 \rightarrow Re\left(\frac{1}{x+iy} \times \frac{x-iy}{x-iy}\right) > 1$

10:00

$Re\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) > 1 \rightarrow Re\left(\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}\right) > 1$

11:00

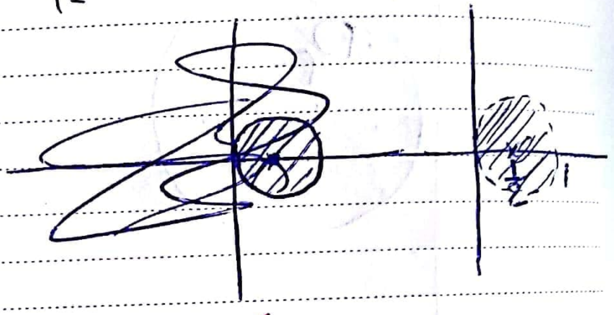
$\frac{x}{x^2+y^2} > 1 \rightarrow x^2+y^2-x < 0 \xrightarrow{\pm\frac{1}{4}} x^2-x+\frac{1}{4}+y^2-\frac{1}{4} < 0$

مربع

12:00

$\rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{4}$

13:00



14:00

مثال: مکان هندسی نقاطی که در نامساوی زیر صدق میکنند رسم کنید.
نمونه سوال امتحانی

15:00

$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1 \rightarrow \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1 \rightarrow \left|\frac{x+iy-1}{x+iy+1}\right| \leq 1$

16:00

17:00

$\rightarrow \frac{|(x-1)+iy|}{|(x+1)+iy|} \leq 1$

18:00

$\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} \leq 1 \rightarrow (x-1)^2+y^2 \leq (x+1)^2+y^2$

19:00

$x^2-2x+1 \leq x^2+1+2x \rightarrow -4x \leq 0$

$\boxed{x \geq 0}$

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

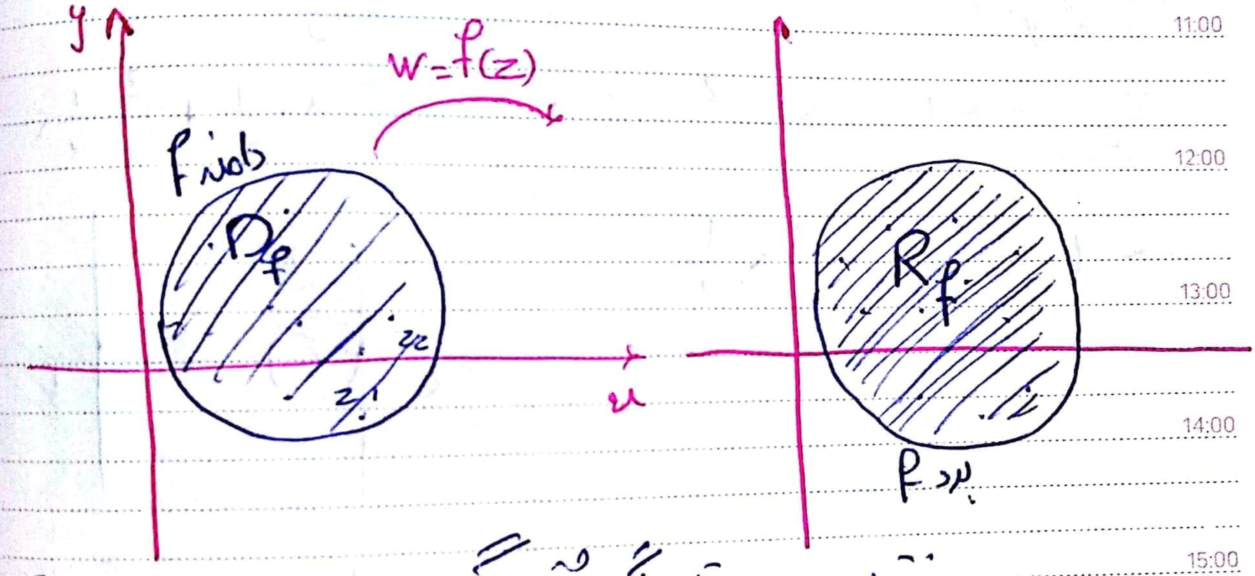
Scanned by CamScanner

پنجشنبه ۹۶/۲/۵

تابع مختلط

$w=f(z)$

تابع مختلط f ابزاری است که مجموعه اعداد مختلط z را که عضو دامنه f یا D_f هستند به مجموعه اعداد مختلط w که عضو برد f هستند تصویر میکند (یا مینگارد)



صفحه اعداد مختلط صفحه z — f به تابع نگاشت میگویند — صفحه اعداد مختلط صفحه w

نکته: توابع مختلط را میتوان بصورت زیر نوشت

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

(تابع مختلط = تابع حقیقی + i تابع حقیقی)

که u و v دو تابع حقیقی برحسب x و y هستند.

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

Scanned by CamScanner

CARBO® Premium Tools

پنجشنبه 98,8,15

مثال: برای توابع مختلط زیر u و v را بیابید

الف) $f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}\times\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}+i\,\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$u(x,y)$ تابع حقیقی — $v(x,y)$ تابع حقیقی

ب) $f(z)=e^{z^2}=e^{(x+iy)^2}=e^{x^2-y^2+i2xy}=e^{x^2-y^2}e^{i2xy}$

$$=e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)=\underbrace{e^{x^2-y^2}\cos 2xy}_{u(x,y)}+i\,\underbrace{e^{x^2-y^2}\sin 2xy}_{v(x,y)}$$

تابع تحلیلی

مثال: برای تابع $f(z)=\sin z$ ، u و v را بیابید

$$f(z)=\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}=\frac{e^{ix-y}-e^{-ix+y}}{2i}$$

$$=\frac{e^{-y}e^{ix}-e^{y}e^{-ix}}{2i}=\frac{e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos x-i\sin x)}{2i}$$

$$=\frac{-\cos x(e^{y}-e^{-y})+i\sin x(e^{y}+e^{-y})}{2i}=i\cos x\sinh y+\sin x\cosh y$$

$$f(z)=\underbrace{\sin x\cosh y}_{u(x,y)}+i\,\underbrace{\cos x\sinh y}_{v(x,y)}$$

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

Scanned by CamScanner

CARBO®
Premium Tools

آبان
۲۳
چهارشنبه
۶ ربیع الاول ۱۴۴۰
14 November
Wednesday . 2018
۱۳۹۷/۸/۲۳

پنجشنبه 98,2,19

09:00
انواع توابع مختلط مقدماتی ← توابع مثلثاتی
توابع معکوس مثلثاتی
10:00
توابع هیپربولیک هذلولوی
11:00
توابع معکوس هیپربولیک
توابع لگاریتمی
12:00
توابع نمائی
13:00
و ...

14:00
تمرین: برای $f(z)=\cos z$، u و v را بیابید

15:00
16:00
17:00
18:00
19:00

Scanned by CamScanner

نوروز کتاب، کتاب خوانی و کتابدار - روز برکت آب ... علامه سید محمد حسین طباطبایی (۱۳۶۰ ه.ش)

حل معادله زیر را حل کنید

$\sin z = 0$

آبان
۲۵
جمعه
16 November
Friday 2018
۱۳۹۷/۸/۲۵

$\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 0$

$$\begin{cases} \sin x \cosh y = 0 \xrightarrow{\cosh y \neq 0} \sin x = 0 \longrightarrow \boxed{x = n\pi} \\ \cos x \sinh y = 0 \longrightarrow \sinh y = 0 \longrightarrow \boxed{y = 0} \end{cases}$$

$\cos x \to +1, -1$

$\cosh y = \dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2} > 0$

$z = x + iy$

$\boxed{z = n\pi}$

$\sinh = \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2}$

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

Scanned by CamScanner

CARBO®
Premium Tools

تابع همساز دوگان

مثال: برای تابع $f(z)=\cosh z$ ، u و v را بیابید

$$f(z)=\cosh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}=\frac{e^{x+iy}+e^{-x-iy}}{2}=\frac{e^{x}e^{iy}+e^{-x}e^{-iy}}{2}$$

$$=\frac{e^{x}(\cos y-i\sin y)+e^{-x}(\cos y-i\sin y)}{2}=\frac{\cos y\,(e^{x}+e^{-x})+i\sin y\,(e^{x}-e^{-x})}{2}$$

$$\cosh z=\underbrace{\cos y\cosh x}_{u(x,y)}+i\,\underbrace{\sin y\sinh x}_{v(x,y)}$$

مثال: معادله زیر را حل کنید $\cosh z=0$

$$\cos y\cosh x+i\sin y\sinh x=0$$

$$\begin{cases}\cos y\cosh x=0 \xrightarrow{\cosh x\neq 0} \cos y=0 \longrightarrow y=(2n-1)\frac{\pi}{2}\\ \sin y\sinh x=0 \longrightarrow \sinh x=0 \longrightarrow x=0\end{cases}$$

$$z=x+iy=i(2n-1)\frac{\pi}{2}$$

تمرین: برای $f(z)=\sinh z$ ، u و v را بیابید سپس معادله $\sinh z=0$ را حل کنید.

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

تابع لگاریتمی

$z = re^{i\theta}$

$\ln z = \ln r + i\theta$

مثال: $\ln i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$

$$i = 1 e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (r,\ \theta)$$

توابع نمایی

$$f(z) = e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

$$e^{z} = \underbrace{e^{x}\cos y}_{u} + i\underbrace{e^{x}\sin y}_{v}$$

$$f(z) = z^{c} = e^{c\ln z}$$

مثال: i^{i} را بیابید

$$i^{i} = e^{i\ln i} = e^{i(\ln 1 + i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

حد و پیوستگی تابع مختلط:

تعریف: تابع $f(z)$ در نقطه $z = z_0$ دارای حد است اگر

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L$$

تعریف: تابع $f(z)$ در نقطه z_0 پیوسته است اگر حد تابع با مقدار خود تابع در آن نقطه برابر باشد

مشتق پذیری تابع مختلط

تعریف: تابع $f(z)$ در نقطه z_0 مشتق پذیر است اگر در آن نقطه پیوسته باشد و

حد زیر وجود داشته باشد

$$\lim \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

صفحه 51

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

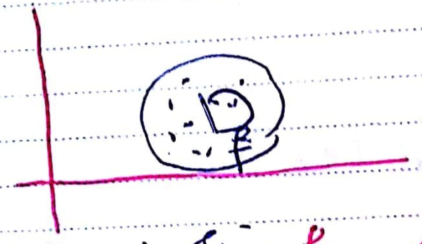
Scanned by CamScanner

CARBO®
Premium Tools

پنجشنبه ۹۸/۲/۱۹

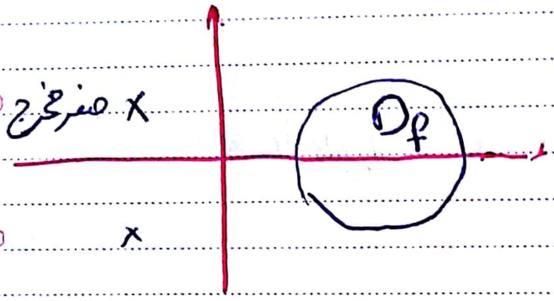
تابع تحلیلی:

تابع مختلط $f(z)$ را در دامنه D تحلیلی گوییم هرگاه $f(z)$ در تمام نقاط دامنه مشتق‌پذیر باشد



همان مثال تابع چندجمله‌ای $f(z)=c_0+c_1z_1+c_2z^2$ در تمام صفحه z تحلیلی است

تابع گویا $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ (P و Q چندجمله‌ای اند) در دامنه‌هایی که شامل صفر مخرج نباشد تحلیلی است



قضیه کوشی - ریمان

اگر تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در دامنه D تحلیلی باشد آنگاه داریم

$$\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$$

و بالعکس

قضیه کوشی ریمان

$$\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases} \Longleftrightarrow$$ $f(z)$ تحلیلی است

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

ولادت حضرت رسول اکرم صلی ا... علیه و آله به روایت اهل سنت (۵۳ سال قبل از هجرت) - آغاز هفته وحدت

مثال: کدامیک از توابع زیر تحلیلی اند؟

الف) $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} - i\underbrace{2xy}_{v}$

$u_x = 2x$, $v_y = 2x \longrightarrow u_x = v_x$

$u_y = -2y$, $v_x = 2y \longrightarrow u_y = -v_x$

$\longrightarrow$ $f(z)$ تحلیلی است

ب) $f(z) = e^x = \underbrace{e^x \cos y}_{u} + i\underbrace{e^x \sin y}_{v}$

$u_x = e^x \cos y$, $v_y = e^x \cos y \longrightarrow u_x = v_y$

$\longrightarrow$ تابع $f(z)$ تحلیلی است

$u_y = -e^x \sin y$, $v_x = e^x \sin y \longrightarrow u_y = -v_x$

نکته: تابعی که در تمام صفحه z تحلیلی باشد تابع تام می‌گوئیم.

ج) $f(z) = \bar{z} = x - iy = \underbrace{x}_{u} + i\underbrace{(-y)}_{v}$

$u_x = 1$, $v_y = -1 \Longrightarrow u_x \neq v_y$ تابع $f(z)$ تحلیلی نیست

تعمیم لاپلاس

اگر تابع $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ در دامنه D تحلیلی باشد، آنگاه u و v هر کدام در معادله لاپلاس صدق کند

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

$v_{xx} + v_{yy} = 0$

صفحه 53

Sat		5	12	19	26
Sun		6	13	20	27
Mon		7	14	21	28
Tue	1	8	15	22	29
Wed	2	9	16	23	30
Thu	3	10	17	24	
Fri	4	11	18	25	

Scanned by CamScanner

پنجشنبه ۹۸/۲/۱۹

CARBO Premium Tools

با u و v مزدوج همساز، یا مزدوج هارمونیک میگوییم

مثال: ابتدا نشان دهید تابع $u = x^2 - y^2 - y$ همساز است و سپس مزدوج همساز آن را بیابید و f(z) را بنویسید

09:00
10:00
11:00 $u_{x} = 2x \qquad u_{xx} = 2$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_y = -2y - 1 \qquad u_{yy} = -2$

12:00 (قضیه کوشی - ریمان)

$u_x = v_y \longrightarrow v_y = 2x \longrightarrow v = 2xy + h(x)$

13:00 $u_y = -v_x \longrightarrow v_x = 2y + 1 \longrightarrow v = 2xy + x + g(y)$

14:00

$$v = 2xy + x + c$$

15:00 $f(z) = u + iv = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x + c) = x^2 - y^2 + i2xy - y + ix + ic$

$= (x+iy)^2 + i(x+iy) + ic = z^2 + iz + ic$

مثال: ابتدا نشان دهید $u = \sin x \cosh y$ همساز است و سپس مزدوج همساز آن را بیابید.

$u_x = \cos x \cosh y \qquad u_{xx} = -\sin x \cosh y$

$u_y = \sin x \sinh y \qquad u_{yy} = \sin x \cosh y \longrightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_x = v_y \rightarrow v_y = \cos x \cosh y \longrightarrow v = \cos x \sinh y + h(x)$

$u_y = -v_x \rightarrow v_x = -\sin x \sinh y \rightarrow v = \cos x \sinh y + g(y)$

$$v = \cos x \sinh y + c$$

Sat		3	10	17	24
Sun		4	11	18	25
Mon		5	12	19	26
Tue		6	13	20	27
Wed		7	14	21	28
Thu	1	8	15	22	29
Fri	2	9	16	23	30

Scanned by CamScanner

CARBO®
Premium Tools

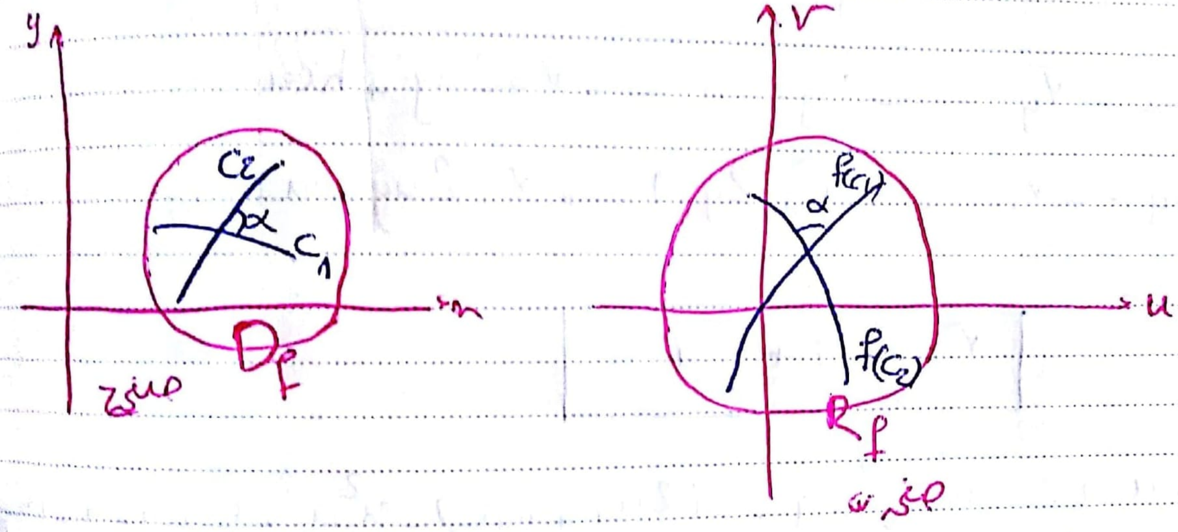
۹۸/۲/۱۲

$f(z) = u + iv = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y + iC$

$f(z) = \sin z + iC$

نگاشت همدیس یا نگاشت کانفرمال

تابع تحلیلی $f(z)$ را یک نگاشت همدیس (حافظ زاویه) گویند اگر C_1 و C_2 دو منحنی در دامنه D باشند که با هم زاویه α تشکیل می‌دهند، نگاشت آن‌ها یعنی (تصویر آن‌ها) $f(C_1)$ و $f(C_2)$ نیز در برد f زاویه خود را حفظ کنند.



برخی از نگاشت‌های همدیس

الف) نگاشت

$f(z) = Az$

$z = re^{i\theta}$

$A = r_1 e^{i\theta_1} \longrightarrow f(z) = r r_1 e^{i(\theta + \theta_1)}$

ب) نگاشت انتقال

$f(z) = z + B$

$z = x + iy$

$B = x_1 + iy_1 \longrightarrow f(z) = (x + x_1) + i(y + y_1)$

Scanned by CamScanner

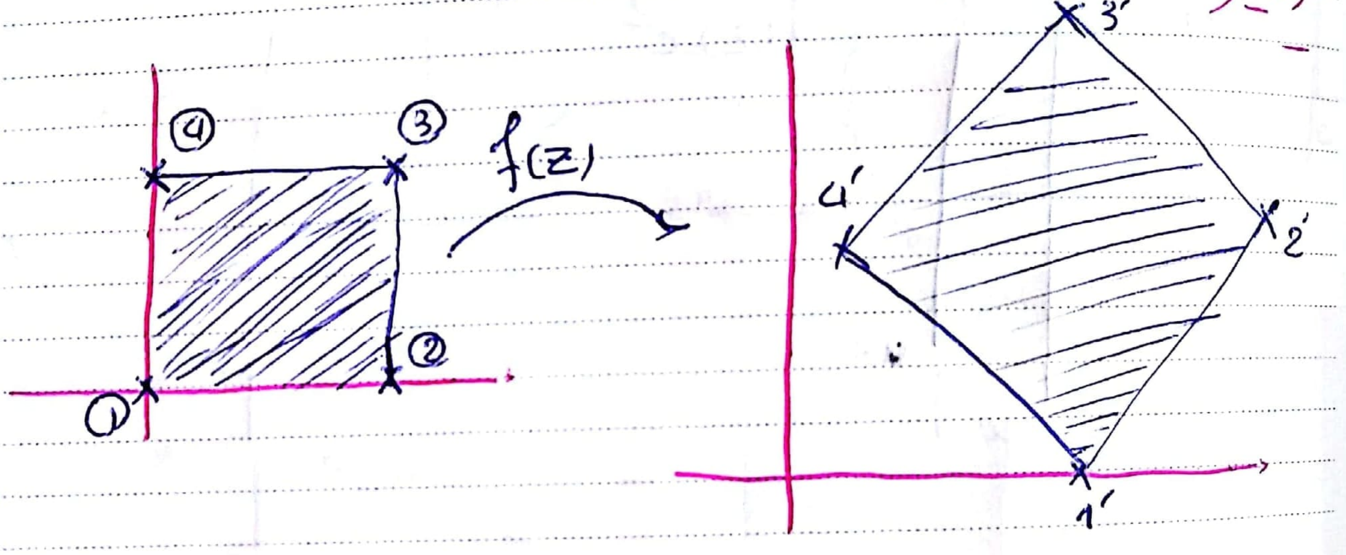
پنجشنبه ۹۷/۲/۱۶

CARBO®
Premium Tools

ج) نگاشت ترکیبی از دو حالت الف و ب)

$$f(z) = Az + B$$

ب) مربع زیر را مطابق شکل تحت نگاشت $f(z) = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ به چه شکلی تصویر میشود (نگاشته می‌شود)؟



① نقطه $z = 0 \longrightarrow f(z) = 2$

② نقطه $z = 1 \longrightarrow f(z) = 3 + i\sqrt{3}$

③ نقطه $z = 1 + i \longrightarrow f(z) = (3 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$

④ نقطه $z = i \longrightarrow f(z) = (2 - \sqrt{3}) + i$

جلسه ۲۰

Scanned by CamScanner

CARBO
Premium Tools

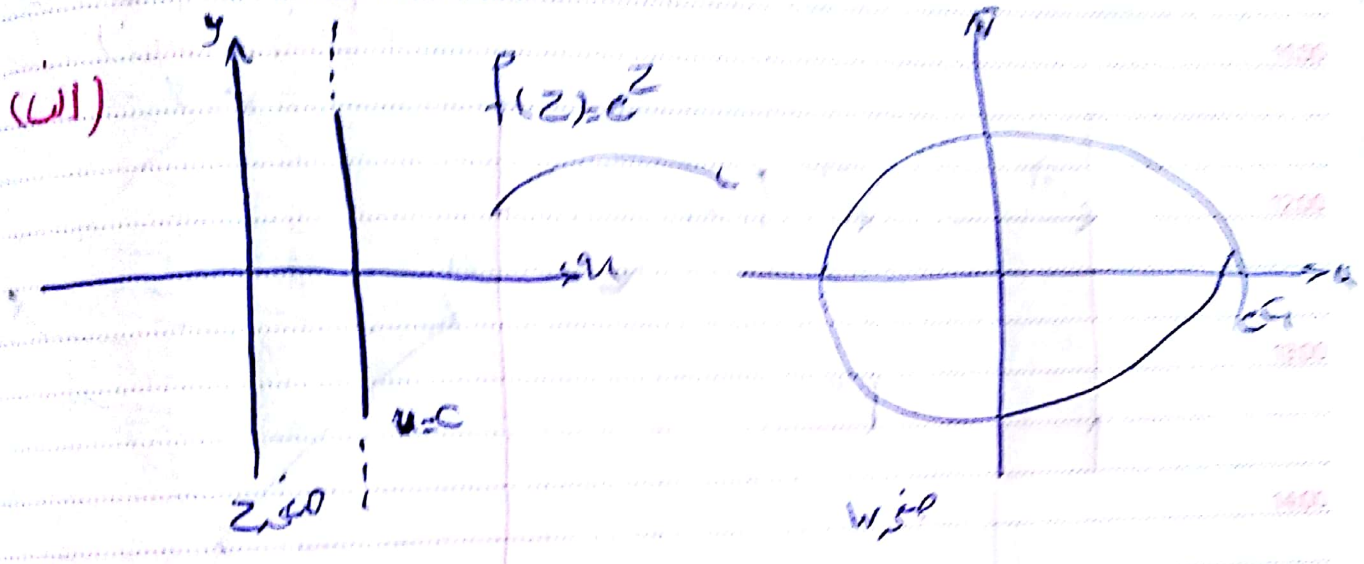
$f(z)=e^{z}=e^{x}e^{iy}$

نگاشت $f(z)=e^{z}$

چون این نگاشت e^{z} خطوط موازی محور y ها یعنی $x=c_1$ را به چه منحنی می نگارد؟

این نگاشت $f(z)=e^{z}$ خطوط موازی محور x ها یعنی $y=c_2$ را به چه منحنی می نگارد؟

(الف)

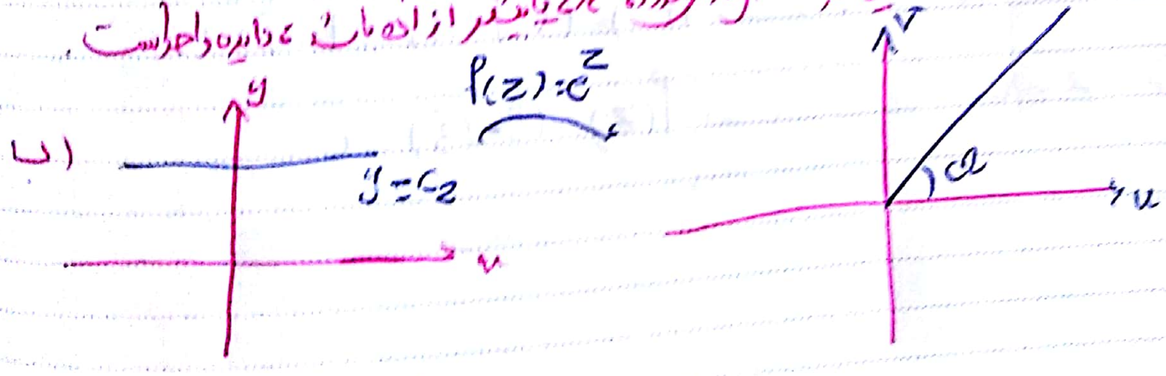


$f(z)=e^{z}=e^{x}e^{iy}$

$\underline{x=c_1}\rightarrow f(z)=e^{c_1}e^{iy}$ → دایره ای به شعاع e^{c_1}

این عبارت اگر دارای محدوده 2π یا بیشتر از آن باشد دایره کامل است.

(ب)



$f(z)=e^{z}=e^{x}e^{iy}$

$\underline{y=c_2}\rightarrow f(z)=e^{x}e^{ic_2}$ نیم خطی با زاویه c_2

نکته مهم: نگاشت $f(z)=e^{z}$ خطوط موازی محور y ها یعنی $x=c_1$ را به دایره ای با شعاع e^{c_1} و خطوط موازی محور x ها یعنی $y=c_2$ را به نیم خطی با زاویه c_2 نسبت به محور x ها تصویر میکند (مینگارد).

صفحه 57

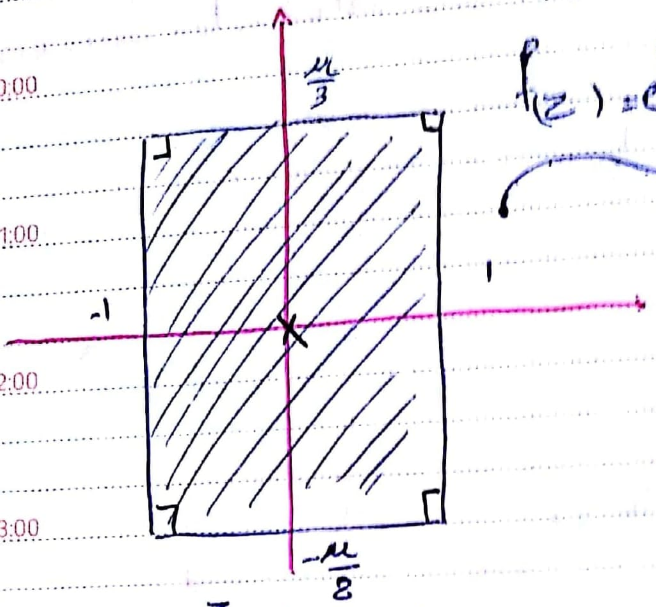
Sat		3	10	17	24
Sun		4	11	18	25
Mon		5	12	19	26
Tue		6	13	20	27
Wed		7	14	21	28
Thu	1	8	15	22	29
Fri	2	9	16	23	30

Scanned by CamScanner

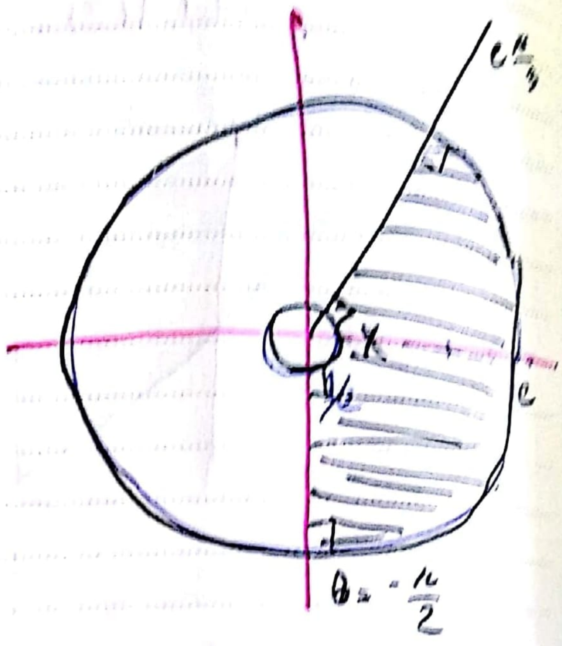
پنجشنبه 98,2,26

CARBO
Premium Tools

مثال: تصویر مستطیل زیر تحت نگاشت $f(z)=e^{z}$ را بیابید (رسم شکل)



$f(z)=e^{z}$



$x=1 \xrightarrow{f(z)=e^{z}} e^{1}$ دایره به شعاع

$x=-1 \longrightarrow \frac{1}{e}=e^{-1}$ دایره به شعاع

$y=\frac{\pi}{3} \longrightarrow$ نیم خطی با زاویه $\frac{\pi}{3}$

$y=-\frac{\pi}{2} \longrightarrow$ نیم خطی با زاویه $-\frac{\pi}{2}$

نگاشت $f(z)=\frac{1}{z}$

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}\times\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\,\frac{-y}{x^2+y^2}$$

نکته: اگر معادله خط و دایره در صفحه z بصورت $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$ باشد آنگاه تصویر معادله فوق تحت نگاشت $f(z)=\frac{1}{z}$ بصورت زیر خواهد بود

$$D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0$$

مهم

Sat		3	10	17	24
Sun		4	11	18	25
Mon		5	12	19	26
Tue		6	13	20	27
Wed		7	14	21	28
Thu	1	8	15	22	29
Fri	2	9	16	23	30

Scanned by CamScanner

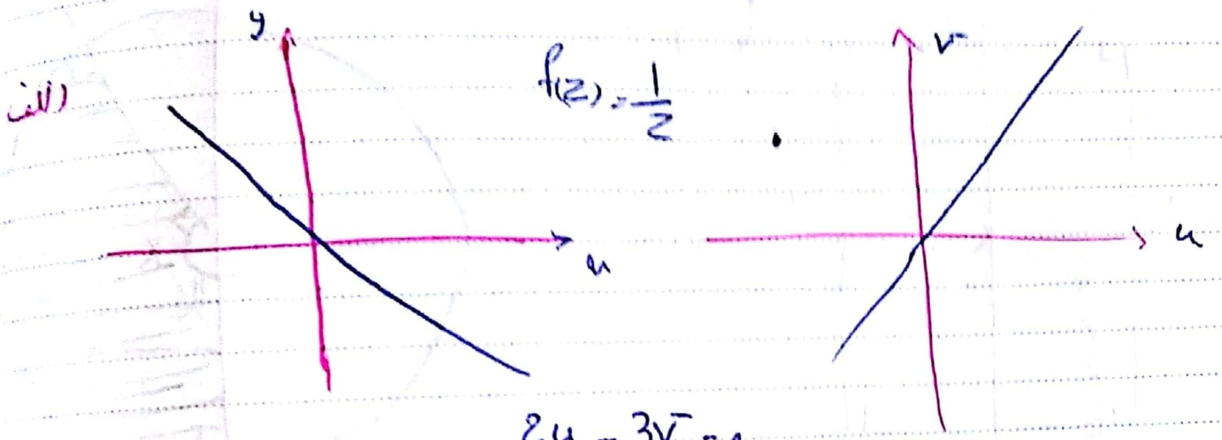
CARBO®
Premium Tools

مثال: الف) تصویر خط $2x+3y=0$ را تحت نگاشت $f(z)=\frac{1}{z}$ بیابید.

ب) تصویر خط $2x+3y+1=0$ را تحت نگاشت $f(z)=\frac{1}{z}$ بیابید.

10:00

الف)



11:00

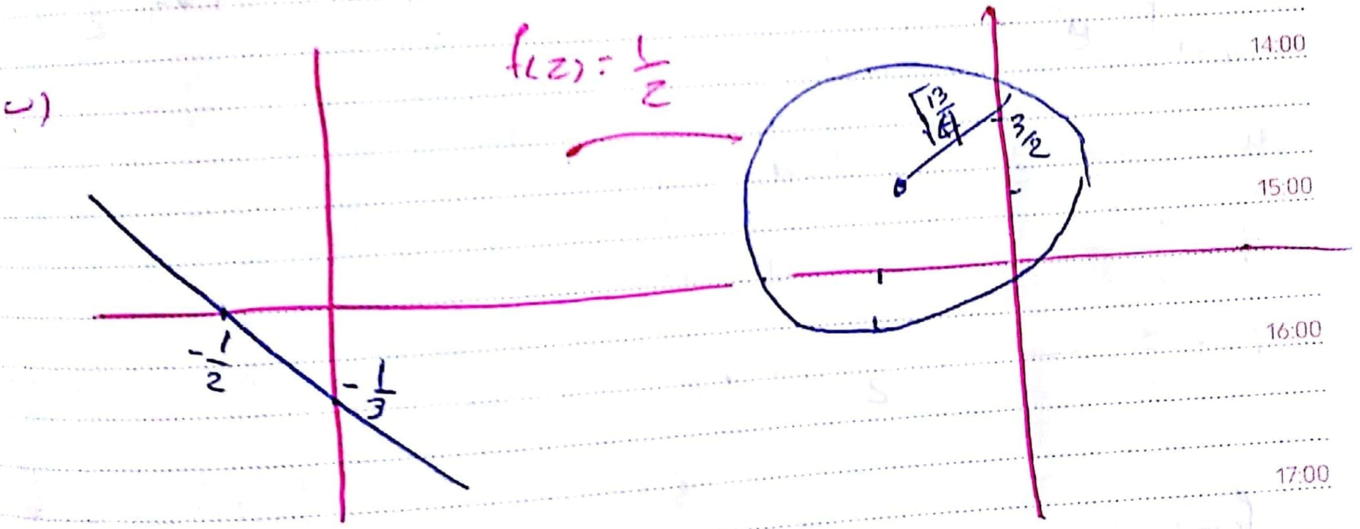
12:00

13:00

$2u-3v=0$

14:00

ب)



15:00

16:00

17:00

$(u^2+v^2)+2u-3v=0$

18:00

$(u^2+2u+1)+(v^2-3v+\frac{9}{4})-1-\frac{9}{4}=0$

$(u+1)^2+(v-\frac{3}{2})^2=\frac{13}{4} \longrightarrow$ دایره‌ای به مرکز $(-1,\frac{3}{2})$ شعاع $\sqrt{\frac{13}{4}}$

19:00

ب) نگاشت $f(z)=z^n$

$z=re^{i\theta}$

$f(z)=z^n=r^ne^{in\theta}$

صفحه 59

Sat		3	10	17	24
Sun		4	11	18	25
Mon		5	12	19	26
Tue		6	13	20	27
Wed		7	14	21	28
Thu	1	8	15	22	29
Fri	2	9	16	23	30

روز نیروی دریایی

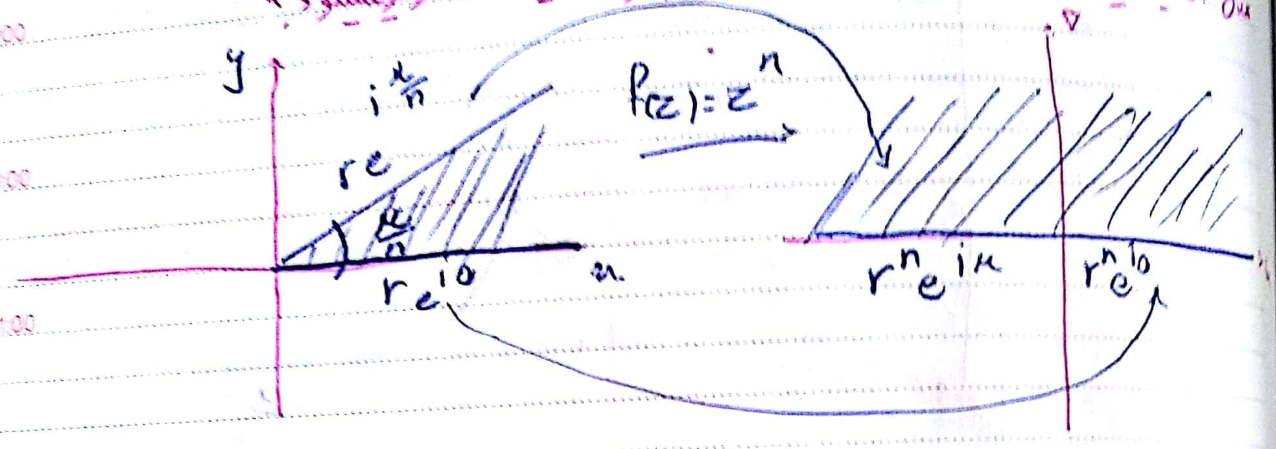
Scanned by CamScanner

پنجشنبه 98/2/26

09:00

مثال: ناحیه زیر تحت نگاشت $f(z)=z^n$ به چه ناحیه‌ای تصویر می‌شود؟

10:00



11:00

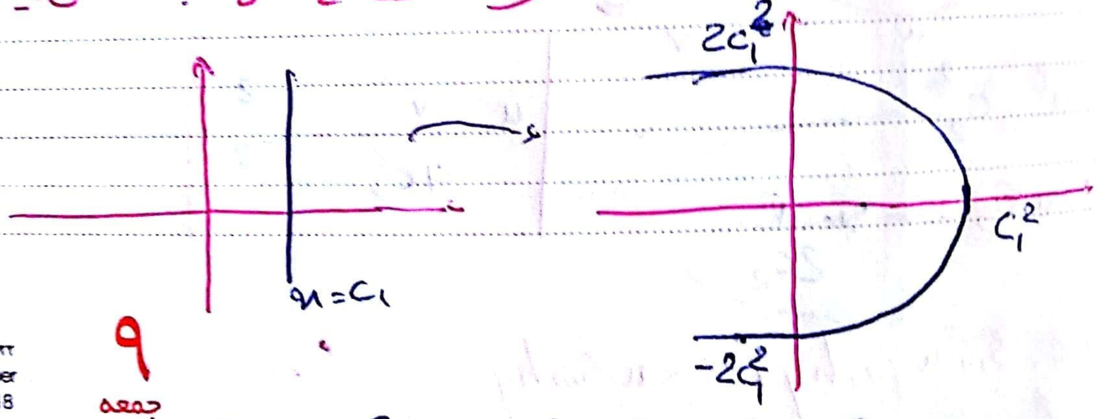
12:00

مثال: الف) تصویر (نگاشت) $f(z)=z^2$ خطوط موازی محور yها یعنی $u=c_1$ را به چه منحنی‌ای می‌نگارد

13:00

ب) نگاشت $f(z)=z^2$ خطوط موازی محور xها یعنی $y=c_2$ را به چه منحنی می‌نگارد

الف)



15:00

$$f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy$$

$$u=c_1:\quad \underbrace{c_1^2-y^2}_{u}+i\underbrace{2c_1y}_{v}$$

$$\begin{cases} u=c_1^2-y^2 \\ v=2c_1y \rightarrow y=\dfrac{v}{2c_1} \end{cases} \longrightarrow \boxed{u=c_1^2-\dfrac{v^2}{4c_1^2}}$$

Sat	3	10	17	24
Sun	4	11	18	25
Mon	5	12	19	26
Tue	6	13	20	27
Wed	7			

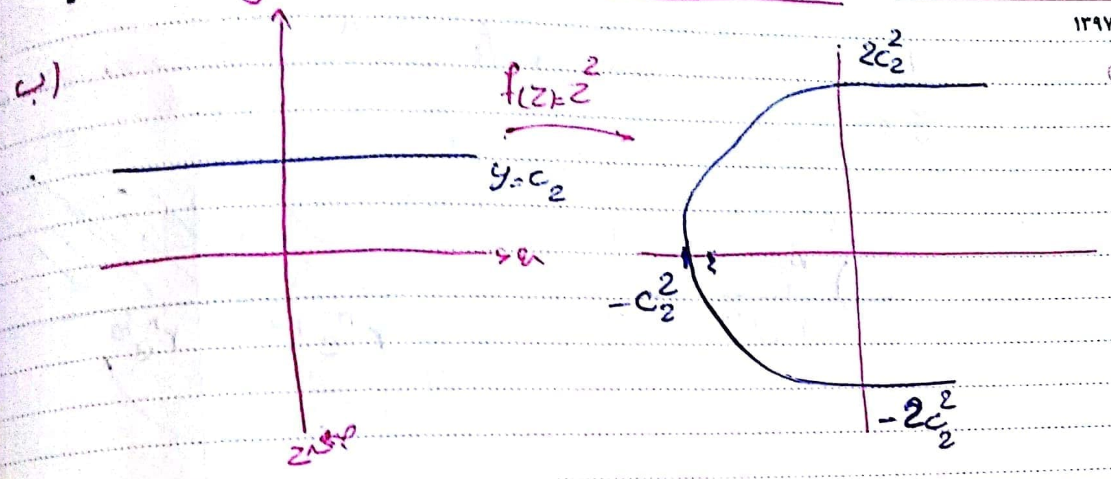
Scanned by CamScanner

CARBO® Premium Tools

یکشنبه 98,2,26

ب)

$f(z) = z^2$



$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

$y = c_2 \quad f(z) = \underbrace{x^2 - c_2^2}_{u} + i\underbrace{2xc_2}_{v}$

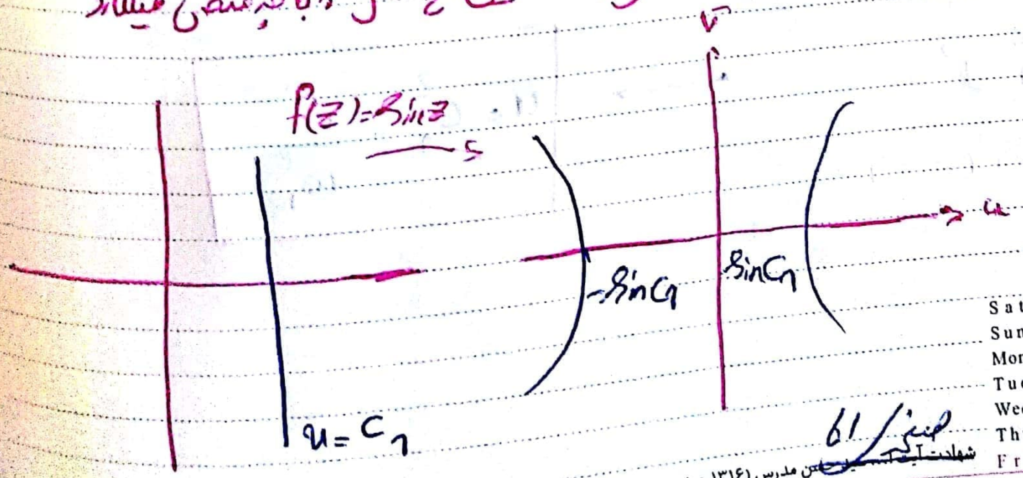
$$\begin{cases} u = x^2 - c_2^2 \\ v = 2xc_2 \rightarrow x = \dfrac{v}{2c_2} \end{cases} \longrightarrow \boxed{u = \dfrac{v^2}{4c_2^2} - c_2^2}$$

نگاشت $f(z) = \sin z$

$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

مثال: الف) نگاشت $f(z) = \sin z$ خطوط موازی محورها یعنی $x = c_1$ را به چه منحنی می‌نگارد؟

ب) نگاشت $f(z) = \sin z$ خطوط موازی محور xها یعنی $y = c_2$ را به چه منحنی می‌نگارد



صفحه 61

Sat		3	10	17	24
Sun		4	11	18	25
Mon		5	12	19	26
Tue		6	13	20	27
Wed		7	14	21	28
Thu	1	8	15	22	29
Fri	2	9	16	23	30

CARBO®
Premium Tools

پنجشنبه 98, 2, 26

09:00

$f(Z) = \sin Z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

$\xrightarrow{x = c_1} f(Z) = \underbrace{\sin c_1 \cosh y}_{u} + i \underbrace{\cos c_1 \sinh y}_{v}$

10:00

$u = \sin c_1 \cosh y \longrightarrow \cosh y = \dfrac{u}{\sin c_1}$

11:00

$v = \cos c_1 \sinh y \longrightarrow \sinh y = \dfrac{v}{\cos c_1}$

12:00

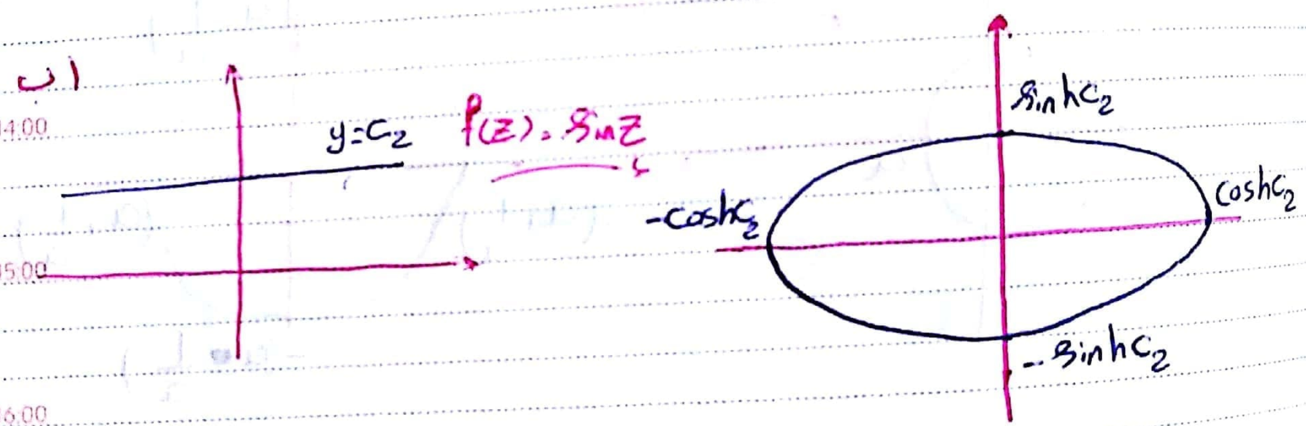
داریم $\longrightarrow \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \longrightarrow \boxed{\dfrac{u^2}{\sin^2 c_1} - \dfrac{v^2}{\cos^2 c_1} = 1}$ هذلولی

13:00

ب)

14:00

15:00



16:00

$f(z) = \sin Z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

17:00

$\xrightarrow{y = c_2} f(z) = \underbrace{\sin x \cosh c_2}_{u} + i \underbrace{\cos x \sinh c_2}_{v}$

18:00

$u = \sin x \cosh c_2 \longrightarrow \sin x = \dfrac{u}{\cosh c_2}$

19:00

$v = \cos x \sinh c_2 \longrightarrow \cos x = \dfrac{v}{\sinh c_2}$

داریم $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\boxed{\dfrac{u^2}{\cosh^2 c_2} + \dfrac{v^2}{\sinh^2 c_2} = 1}$

Sat		3	10	17	24
Sun		4	11	18	25
Mon		5	12	19	26
Tue		6	13	20	27
Wed		7	14	21	28
Thu	1	8	15	22	29
Fri	2	9	16	23	30

صفحه 62/

Scanned by CamScanner

ﻪ 98,2,26

$f(z) = z + \frac{1}{z}$ (تبدیل) نگاشت ژوکوسکی

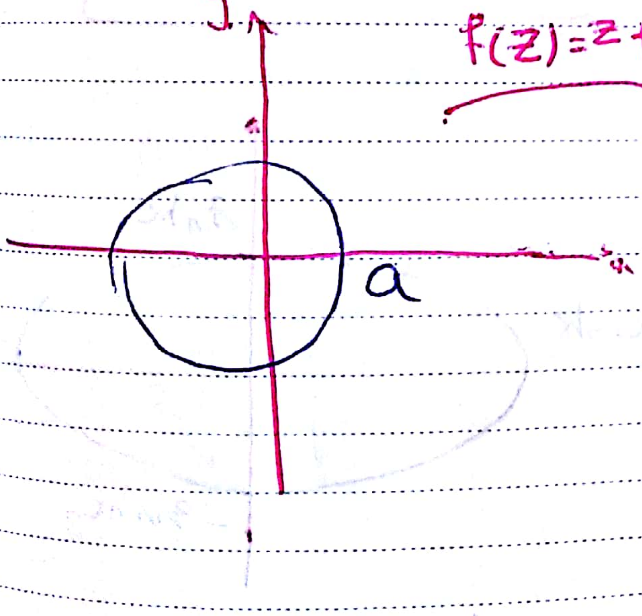
$z = re^{i\theta}$

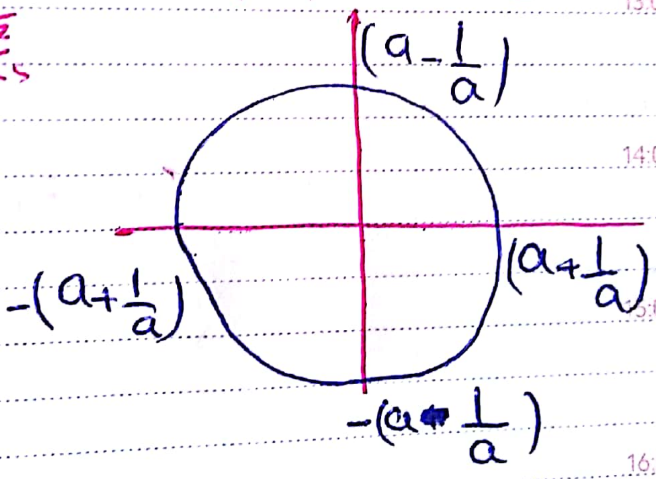
$f(z) = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$

$f(z) = \underbrace{\cos\theta\left(r + \frac{1}{r}\right)}_{u} + i\,\underbrace{\sin\theta\left(r - \frac{1}{r}\right)}_{v}$

مثال: تصویر دایره $|z| = a$ $(r=a)$ را تحت نگاشت ژوکوسکی بیابید.

$f(z) = z + \frac{1}{z}$





Scanned by CamScanner

صفرها و قطب‌های تابع

صفرهای تابع نقاطی هستند که در آن نقاط مقدار تابع برابر صفر خواهد بود

قطب های تابع نقاطی هستند که در آن نقاط مقدار تابع بی نهایت خواهد بود

$$f(z) = \frac{(z-i)(z+3)}{z^2(z+4)(z-2i)}$$

صفرهای تابع : i و -3

قطب های تابع (استثنایی) (Singular) : 0 و 0 و -4 و $2i$

مانده تابع $f(z)$ در نقاط قطب

اگر تابع $f(z)$ در $z=a$ دارای قطب مرتبه 1 باشد، داریم :

$$\underset{\text{قطب مرتبه ۱ } z=a}{\operatorname{Res}} f(z) = \lim_{z \to a} \left((z-a) f(z) \right)$$

اگر تابع $f(z)$ در $z=a$ دارای قطب مرتبه ۲ باشد، داریم

مانده Residue

$$\underset{\text{قطب مرتبه ۲ } z=a}{\operatorname{Res}} f(z) = \lim_{z \to a} \frac{d}{dz} \left[(z-a)^2 f(z) \right]$$

Sat		3	10	17	24
Sun		4	11	18	25
Mon		5	12	19	26
Tue		6	13	20	27
Wed		7	14	21	28
Thu	1	8	15	22	29
Fri	2	9	16	23	30

Scanned by CamScanner

CARBO®
Premium Tools

چهارشنبه ۹۸/۳/۱

نکته: اگر $z=a$ قطب مرتبه اول تابع $\frac{g(z)}{h(z)}$ باشد آنگاه میتوانیم از فرمول زیر مانده تابع $f(z)$ را بیابیم

$$\operatorname{Res} f(z) = \left.\frac{g(z)}{h'(z)}\right|_{z=a}$$

$z=a$ قطب مرتبه اول

مثال: مانده تابع زیر را در $z=a$ بیابید

$$f(z) = \frac{e^z}{z}$$

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \left.\frac{e^z}{1}\right|_{z=0} = e^0 = 1$$

مثال: مانده تابع $f(z)$ را در نقاط تکین (قطب) بیابید.

$$f(z) = \frac{9z+i}{z(z^2+1)}$$

قطب ها:
- 0 — مرتبه ۱
- i — مرتبه ۱
- $-i$ — مرتبه ۱

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \left.\frac{9z+i}{3z^2+1}\right|_{z=0} = \frac{i}{1} = i$$

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \left.\frac{9z+i}{3z^2+1}\right|_{z=i} = \frac{10i}{-2} = -5i$$

$$\operatorname{Res}_{z=-i} f(z) = \left.\frac{9z+i}{3z^2+1}\right|_{z=-i} = \frac{-9i+i}{-3+1} = \frac{-8i}{-2} = 4i$$

Sat		10	17	24
Sun	4	11	18	25
Mon	5	12	19	26
Tue	6	13	20	27
Wed	7	14	21	28
Thu 1	8	15	22	29
Fri 2	9	16	23	30

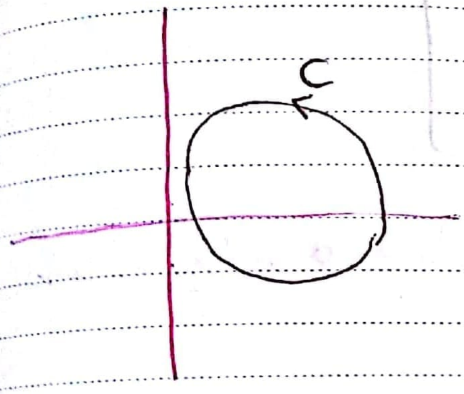
روز دانشجو

Scanned by CamScanner

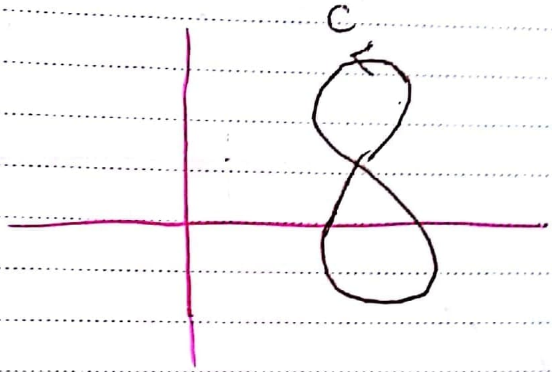
انتگرال گیری تابع مختلط

مسیر بسته ساده:

مسیری است که نقاط آن هیچ تلاقی نداشته باشد.



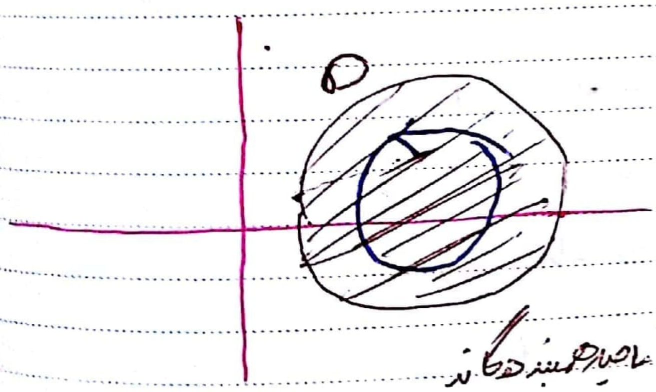
مسیر بسته ساده



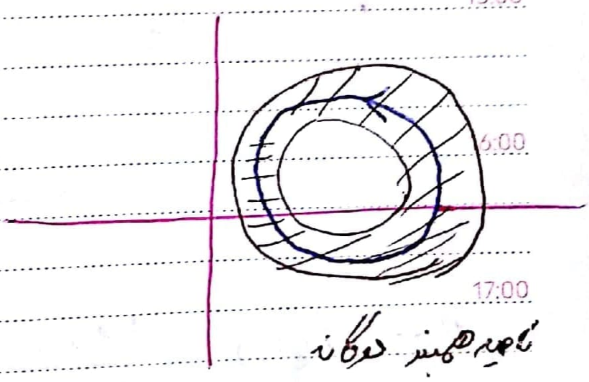
مسیر بسته غیر ساده

ناحیه همبند ساده:

ناحیه ای که هر مسیر بسته در آن تنها نقاط داخله را محصور کند — حفره نداشته باشیم



ناحیه همبند همگانه



ناحیه همبند دوگانه

فرمول انتگرال کوشی

الف) اگر $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D تحلیلی باشد، آنگاه به ازای هر مسیر بسته ساده C درون D داریم:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

Sat		3	10	17	24
Sun		4	11	18	25
Mon		5	12	19	26
Tue		6	13	20	27
Wed		7	14	21	28
Thu	1	8	15	22	29
Fri	2	9	16	23	30

ص / 67

Scanned by CamScanner

آذر
ربیع الثانی ۱۴۴۰
9 December
Sunday . 2018

۱۸
یکشنبه

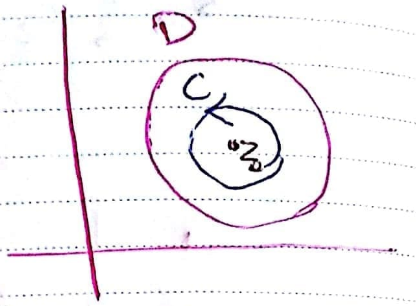
جلسه ۹۸،۳،۱

۱۳۹۷/۹/۱۸

ت) اگر $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد و z_0 داخل مسیر انتگرال گیری C باشد آنگاه داریم

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

C در جهت مثلثاتی



و نیز داریم :

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz = 2\pi i\, f'(z_0)$$

C در جهت مثلثاتی

مثال انتگرال زیر را بیابید (با کمک انتگرال کوشی)

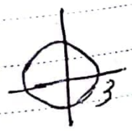
الف) $I = \oint_{|z|=1} e^z\,dz = 0$ (تحلیلی)

در جهت مثلثاتی
دایره با شعاع ۱

ب) $I = \oint_{|z|=8} (4z^4 + 3z^2 + 5)\,dz = 0$ (تابع چندجمله‌ای تحلیلی است)

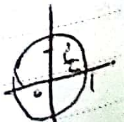
ج) $I = \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z-2}\,dz = 2\pi i\, f(2) = 2\pi i e^2$

در جهت مثلثاتی



د) $I = \oint_{|z|=1} \frac{z^3-6}{2z-i} = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^3-6}{2}}{z-\frac{i}{2}} = 2\pi i\, f\left(\frac{i}{2}\right) = 2\pi i\left(\frac{\left(\frac{i}{2}\right)^3-6}{2}\right)$

$= 2\pi i\left(\frac{-\frac{i}{8}-6}{2}\right) = 2\pi i\left(\frac{-i}{16}-3\right) = \frac{\pi}{8} - 6\pi i$



Sat		3	10	17	24
Sun		4	11	18	25
Mon		5	12	19	26
Tue		6	13	20	27
Wed		7	14	21	28
Thu	1	8	15	22	29
Fri	2	9	16	23	30

صفحه ۶۸

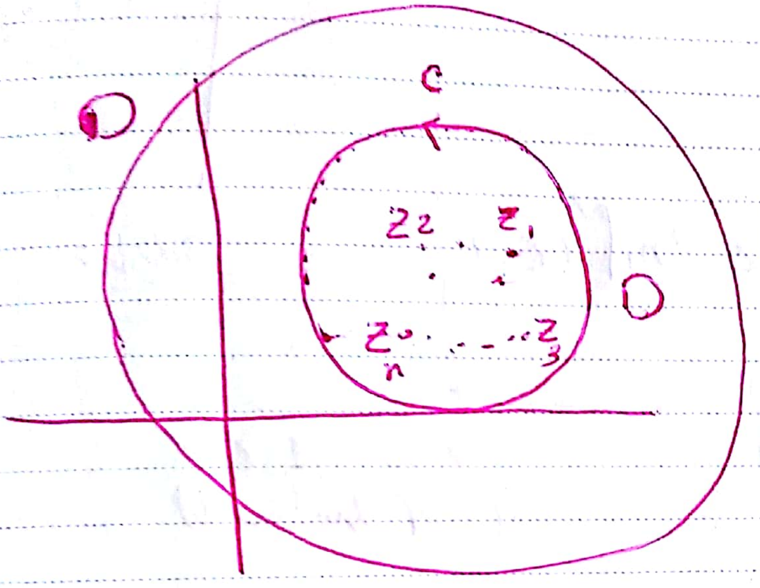
CARBO® Premium Tools

Scanned by CamScanner

CARBO
Premium Tools

انتگرال گیری به روش مانده‌ها

هرگاه $f(z)$ در داخل مسیر C در تمام نقاط بجز در نقاط منفرد (تکین) z_1 و z_2 و z_3 و ... z_n تحلیلی باشد، آنگاه داریم



$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum$$ (مانده‌های $f(z)$ در نقاط قطب که داخل مسیر هستند)

C در جهت مثلثاتی

مثال ۱: با روش مانده‌ها بیابید:

(الف) $I = \oint \frac{4-3z}{z^2-z}$

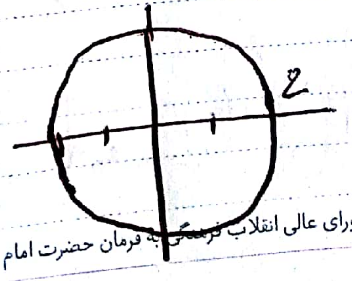
$|z|=2$ در جهت مثلثاتی

برای حل دو گام داریم:

گام اول: مسیر را شناسایی کرده و سپس قطب‌های تابع $f(z)$ را بدست می‌آوریم و قطب‌هایی که داخل مسیر هستند جدا می‌کنیم

گام دوم: از فرمول انتگرال گیری به روش مانده‌ها استفاده میکنیم

قطب‌ها: $z = 0$ ✓ ، $z = 1$ ✓ هر دو داخل مسیرند



Sat		3	10	17	24
Sun		4	11	18	25
Mon		5	12	19	26
Tue		6	13	20	27
Wed		7	14	21	28
Thu	1	8	15	22	29
Fri	2	9	16	23	30

Scanned by CamScanner

چهارشنبه 98/3/1

CARBO®
Premium Tools

۱۳۹۷/۹/۲۰

09:00

$$I = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=1} f(z) \right)$$

10:00

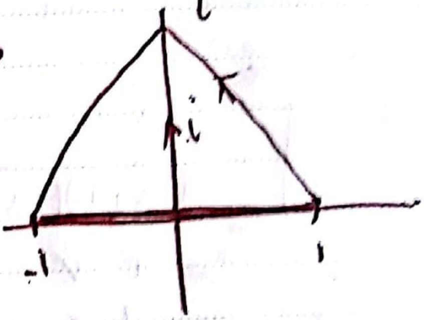
$$= 2\pi i \left(\left.\frac{4-3z}{2z-1}\right|_{z=0} + \left.\frac{4-3z}{2z-1}\right|_{z=1} \right)$$

11:00

$$= 2\pi i \left(\frac{4}{-1} + \frac{1}{1} \right) = -6\pi i$$

12:00

ب) $I = \oint \frac{\tan z}{z-i}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z)$



مثلثی با رئوس ۱ـ و ۱ و i

13:00

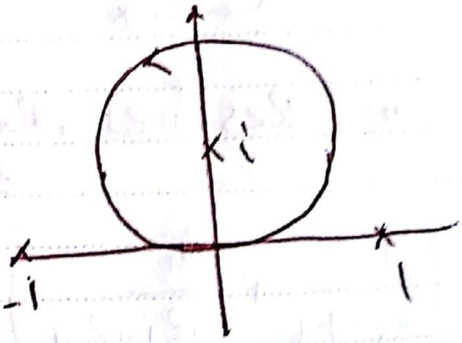
$$I = 2\pi i \left(\left.\frac{\tan z}{1}\right|_{z=i} \right) = 2\pi i \tan i$$

14:00

$$2\pi i \frac{\sin i}{\cos i} = -2\pi \tanh i$$

15:00

ج) $I = \oint \frac{1}{z^4-1}\, dz$



16:00

$|z-i|=1$ دایره‌ای

$|z-a|=\rho$

17:00

قطب‌ها: $z^4 = 1$

$z \to 1$ ✗, -1 ✗, i ✓, $-i$ ✗

18:00

$$= 2\pi i \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=i} = 2\pi i \frac{1}{4i}$$

$$\boxed{I = -\frac{\pi}{2}}$$

19:00

Sat		3	10	17	24
Sun		4	11	18	25
Mon		5	12	19	26
Tue		6	13	20	27
Wed		7	14	21	28
Thu	1	8	15	22	29
Fri	2	9	16	23	30

(۱۳۶۰ هش)

70

Scanned by CamScanner

انتگرال های حقیقی که با حساب ماندها حل می شوند

الف) انتگرال های به شکل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ که در آن $f(x)$ یک تابع گویا به صورت $\frac{p(x)}{q(x)}$ باشد و $q(x)$ صفر حقیقی ندارد و درجه مخرج حداقل ۲ تا از درجه صورت بیشتر است. در این حالت داریم

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \left(\sum \text{مانده‌های } f(z) \text{ برای قطب‌های که در نیم صفحه بالای } z \text{ هستند} \right)$$

مثال: I را بیابید.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{3}$$

قطبهای $f(z)$: i ✓، $-i$ ✗، $2i$ ✓، $-2i$ ✗

$$I = 2\pi i \left(\underset{z=i}{Res} f(z) + \underset{z=2i}{Res} f(z) \right) = 2\pi i \left(\frac{z^3}{4z^3+10z}\Big|_{z=i} + \frac{z^2}{4z^3+10z}\Big|_{z=2i} \right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-1}{-4i+10i} + \frac{-4}{-32i+20i} \right) = 2\pi i \left(\frac{i}{6} - \frac{i}{3} \right) = 2\pi i \left(-\frac{i}{6} \right) = \frac{\pi}{3}$$

ب) انتگرال های به صورت $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\, dx$ یا $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx$ از روابط زیر حاصل میشود.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx = Re\left[2\pi i \sum Res\left(e^{i\alpha z} f(z) \right) \right]$$

برای قطب های که در نیم صفحه بالای z هستند

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\, dx = Im\left[2\pi i \sum Res\left(e^{i\alpha z} f(z) \right) \right]$$

برای قطب هایی که در نیم صفحه بالای z هستند

صفحه ۷۱

Scanned by CamScanner

CARBO®
Premium Tools

آذر ۲۲ پنجشنبه
۵ ربیع الثانی ۱۴۴۰
13 December
Thursday . 2018
۱۳۹۷/۹/۲۲

چهارشنبه 98,3,1

مثال: I را بیابید

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+4x+5}\,dx \qquad \alpha = 1$$

$f(x)$

$f(z)$ تشکیل : z ⟨ $-2+i$ ✓ , $-2-i$ ✗

$$I = \operatorname{Re}\left[2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}\right)\right]$$

$$I = \operatorname{Re}\left[2\pi i \left.\frac{e^{iz}}{2z+4}\right|_{z=-2+i}\right] = \operatorname{Re}\left[2\pi i \frac{e^{i(-2+i)}}{2(-2+i)+4}\right]$$

$-4+2i+4$

$$\operatorname{Re}\left[\pi e^{-2i} e^{-1}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{\pi}{e}(\cos 2 - i\sin 2)\right] = \frac{\pi}{e}\cos 2$$

آذر ۲۳ جمعه
۶ ربیع الثانی ۱۴۴۰
14 December
Friday . 2018
۱۳۹۷/۹/۲۳

Sat	3	10	17	24
Sun	4	11	18	25

Scanned by CamScanner

CARBO®
Premium Tools

روز ۸ م — پنجشنبه

سری های توانی (بسط) ←
- سری تیلور
- سری مک لورن
- سری لوران

09:00 10:00 11:00

سری های تیلور

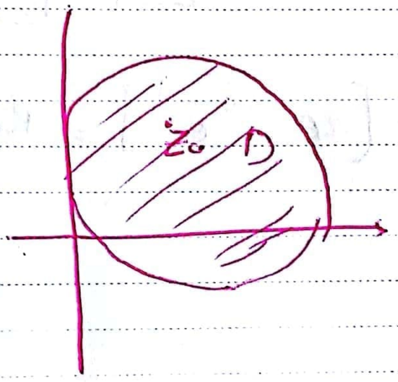
12:00

اگر $f(z)$ در ناحیه D تحلیلی باشد و z_0 درداخل این ناحیه باشد، آنگاه خواهیم داشت

سری تیلور تابع $f(z)$ حول نقطه z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$



13:00 14:00 15:00 16:00

$$f(z) = a_0 + a_1 (z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2 + \dots$$

سری های مک لورن

اگر در سری تیلور اگر به جای z_0 عدد صفر قرار دهیم آنگاه سری مک لورن تابع $f(z)$ بدست می آوریم

18:00

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

سری های مک لورن تابع $f(z)$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

19:00

Sat		3	10	17	24
Sun		4	11	18	25
Mon		5	12	19	26
Tue		6	13	20	27
Wed		7	14	21	28
Thu	1	8	15	22	29
Fri	2	9	16	23	30

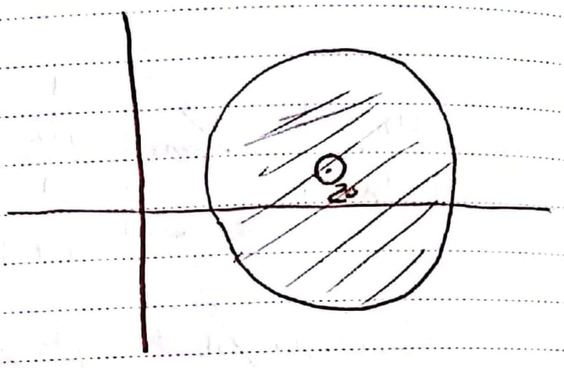
Scanned by CamScanner

جلسه ۱۵ — درس ۹۸ پنجشنبه

CARBO® Premium Tools

سری لورانت:

اگر تابع $f(z)$ در ناحیه همبند دوگانه زیر تحلیلی باشد ($f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی نیست) آنگاه سری لوران تابع $f(z)$ حول نقطه غیر تحلیلی z_0 بصورت زیر نوشته می‌شود.



$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

دایره‌ای به مرکز z_0

شعاع همگرایی

برای تعیین شعاع همگرایی یک سری از رابطه زیر استفاده میکنیم

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

مثال الف) سری تیلور تابع $f(z) = e^z$ را حول نقطه $z_0 = 1$ بیابید.

ب) سری مک‌لورن تابع $f(z) = e^z$ را بیابید و شعاع همگرایی آن را تعیین کنید.

$f(z) = e^z$
$f'(z) = e^z$
$f''(z) = e^z$
$f^{(n)}(z) = e^z$

الف) $a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{e^1}{n!} = \frac{e}{n!}$

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} (z-1)^n$$

$$e^z = e + e(z-1) + \frac{e}{2!}(z-1)^2 + \frac{e}{3!}(z-1)^3 + \cdots$$

سری تیلور حول نقطه ۱

Sat		3	10	17	24
Sun		4	11	18	25
Mon		5	12	19	26
Tue		6	13	20	27
Wed		7	14	21	28
Thu	1	8	15	22	29
Fri	2	9	16	23	30

روز پژوهش - ولادت حضرت امام حسن عسکری علیه السلام (۲۳۲ هـ.ق)

Scanned by CamScanner

CARBO®
Premium Tools

پنجشنبه ۹۸/۳/۲

09:00

ب) $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}$

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

سری مک‌لورن

10:00

11:00

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} |(n+1)| = \infty$$

12:00

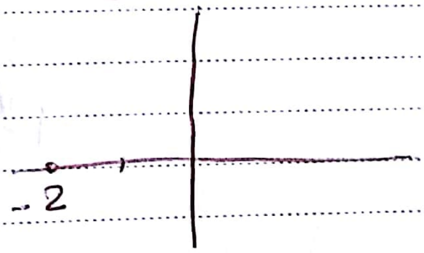
شعاع همگرایی این سری بینهایت است یعنی به ازای تمام zها تساوی برقرار است

13:00

مثال: شعاع همگرایی سری‌های زیر را بیابید:

14:00

الف) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} (z+2)^n$ ، $a_n = \frac{n^n}{n!}$ ، $z_0 = 2$



15:00

16:00

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| =$$

17:00

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{n^n}{n!}}{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^n (n+1)!}{n! \, (n+1)^{n+1}}\right|$$

18:00

19:00

$$R = \lim \left|\frac{n^n (n+1)}{(n+1)^{(n+1)}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right| = \frac{1}{e}$$

Sat	3	10	17	24
Sun	4	11	18	25
Mon	5	12	19	26

Scanned by CamScanner

آذر
۱۰ ربیع الثانی ۱۴۴۰
18 December
Tuesday . 2018

۲۷
سه‌شنبه

پنجشنبه ۹۸/۳/۹

CARBO®
Premium Tools

۱۳۹۷/۹/۲۷

09:00

ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n!} (z-3)^n$

10:00

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{3^n}{n!}}{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{3} \right| = \infty$$

11:00

12:00

ج) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$

13:00

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}} \right|$$

$\frac{1}{4}$

14:00

15:00

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n)!\,(n+1)!\,(n+1)!}{n!\,n!\,(2n+2)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \right| = \frac{1}{4}$$

16:00

سری مک لورن توابع مهم:

17:00

مهم

$$R=\infty ,\ e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

18:00

$$R=\infty ,\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

19:00

$$R=\infty ,\ \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Sat		3	10	17	24
Sun		4	11	18	25
Mon		5	12	19	26
Tue		6	13	20	27
Wed		7	14	21	28
Thu	1	8	15	22	29

شهادت آیت‌الله دکتر محمد مفتح (۱۳۵۸ هش) – روز وحدت حوزه و دانشگاه – روز جهان عاری از خشونت و افراطی‌گری – وفات حضرت معصومه سلام علیها (۲۰۱ هق)

صفحه 76

$R<1$, $\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

$R<1$ $\frac{1}{1+z} = 1-z+z^2-z^3+z^4+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$

مثال: سری لوران تابع $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ را بنویسید

جایگذاری $\frac{1}{1+z^2} = 1-z^2+z^4-z^6+z^8-\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^2)^n$

مثال: سری لوران تابع $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ را بنویسید

داریم $\frac{1}{z-1} = 1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots$

از دو طرف مشتق می‌گیریم $\frac{1}{(1-z)^2} = 1+2z+3z^2+4z^3+\cdots$

$\frac{1}{u} = \frac{-u'}{u^2}$

مثال: سری لوران تابع $\frac{\sin z}{z^5}$ را حول نقطه $z=0$ (که قطب تابع است) بدست آورید و مرتبه قطب را بنویسید.

$\frac{\sin z}{z^5} = \frac{1}{z^5}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)$

$= \frac{1}{z^4} - \frac{1}{3!\,z^2} + \frac{1}{5!} - \frac{z^2}{7!} + \cdots$

مرتبه قطب $z=0$ با بالاترین توان z در مخرج سری لوران می‌باشد

$z=0$ قطب مرتبه ۴

صفحه ۷۷

Scanned by CamScanner

پنجشنبه 98/3/2

مثال: سری لوران تابع $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ را حول نقطه $z_0 = 0$ بنویسید و مرتبه قطب را تعیین کنید

$$f(z) = z^2\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{4!\,z^4} + \cdots\right)$$

$$f(z) = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!\,z^2} + \cdots$$

جواب: $z = 0$ برای تابع $f(z)$ قطب مرتبه بی‌نهایت است. به همین دلیل به این قطب، قطب اساسی (نقطه تکین اساسی) می‌گویند

مثال: سری لوران تابع $f(z) = \frac{z}{z^2-1}$ را حول نقطه $z_0 = 1$ بنویسید

$$f(z) = \frac{z}{z^2-1} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z+1)} = \frac{Az + A + Bz - B}{(z-1)(z+1)}$$

$A + B = 1$, $A - B = 0$, $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$

$$f(z) = \left(\frac{\frac{1}{2}}{z-1}\right) + \frac{\frac{1}{2}}{z+1} = \frac{\frac{1}{2}}{z-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(z-1)+2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{z-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{z-1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{z-1} + \frac{1}{4}\sum (-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

$$f(z) = \frac{\frac{1}{2}}{z-1} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n (z-1)^n$$

Sat		3	10	17	24
Sun		4	11	18	25
Mon		5	12	19	26
Tue		6	13	20	27
Wed		7	14	21	28
Thu	1	8	15	22	29
Fri	2	9	16	23	30

شب یلدا

Scanned by CamScanner

فصل سری لوران تابع $f(z) = \frac{2z}{z^2+1}$ را حول نقطه $z_0 = i$ بنویسید $\sum a_n (z-i)^n$

$$f(z) = \frac{2z}{z^2+1} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} \qquad A=1,\ B=1$$

$$f(z) = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{z-i}{2i}\right)}$$

$$= \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2i}\right)^n (z-i)^n$$

سری فوریه حذف

امتحان از ابتدای معادله موج موج‌ها ، لاپلاس ۲۱۵ نمره

تعیین اعداد گسسته

نگاشت

جلسه آخر مهم

Scanned by CamScanner